مدارهای الکتریکی و الکترونیک

تالیف: سپهر نعیمی

پاییز ۹۸

عنوان کتاب: مدارهای الکتریکی و الکترونیک

نویسنده: سپهر جعفری نعیمی

آدرس اینترنتی: www.NicerLand.ir

کلیه حقوق این اثر متعلق به نویسنده آن می‌باشد و هر گونه کپی برداری و تکثیر به هر شکل (فتوکپی، چاپ، انتشار الکترونیکی) بدون اجازه مکتوب نویسنده ممنوع می‌باشد.

جهت ارتباط با نویسنده می توانید از آدرس Sepehr.Naimi@gmail.com استفاده کنید.

فهرست

فصل اول: الفبای الکترونیک ۶
بخش ۱-۱: نگاهی ذره بینی به مفاهیم اولیه الکترونیک ۶
ساختار مواد و بارهای الکتریکی ۶
پتانسیل و اختلاف پتانسیل ۷
جریان ۷
مواد رسانا و نارسانا ۸
قراردادهای اولیه در الکترونیک ۹
بخش ۱-۲: آشنایی با برخی از عناصر استفاده شونده در مدار ۱۰
مقاومت ۱۰
منابع ولتاژ ۱۱
منابع جریان ۱۲
بخش ۱-۳: آشنایی با روابط حاکم بین اجزای مدار ۱۳
آشنایی با چند اصطلاح ۱۳
قوانین کیرشهف ۱۴
تحلیل مدارها به روش بنیادی (Fundamental method) ۱۵
مدارهای سری و موازی ۱۷
بخش ۱-۴: تبادل انرژی در مدار ۲۱
بخش ۱-۵: منابع وابسته ۲۳
منابع ولتاژ وابسته ۲۳
منابع جریان وابسته ۲۴
کاربردهای منابع وابسته ۲۶
بخش ۱-۶: تحلیل چندین مدار به روش بنیادی ۲۶
بخش ۱-۷: آشنایی با سنسورها و مبدل آنالوگ به دیجیتال (اختیاری) ۳۰
سنسورها ۳۰
مبدل آنالوگ به دیجیتال (ADC) ۳۱
سیگنال کاندیشنینگ (Signal Conditioning) ۳۱
فصل دوم: ولتاژ گره ۳۲
بخش ۲-۱: تحلیل مدارها به روش ولتاژ گره ۳۲
مقدمه ای بر روش ولتاژ گره ۳۲
روش ولتاژ گره ۳۳
بخش ۲-۲: ابر گره ۳۸
راه حل ابر گره ۴۰
بخش ۲-۳: حل چندین مدار به روش ولتاژ گره و ابرگره ۴۱
فصل سوم: مدارهای خطی (Linear Circuits) ۴۸
بخش ۳-۱: سیستم های خطی (Linear systems) ۴۸
مفهوم خطی بودن (Linearity) ۴۸

بررسی رفتار مدارهای مقاومتی..... ۴۹
بخش ۳-۲: تحلیل مدارهای خطی به روش جمع آثار ۵۱
به کار بردن خاصیت جمع آثار در تحلیل مدار..... ۵۱
جمع آثار و منابع وابسته..... ۵۷
بخش ۳-۲: معادل تونن (Thevenin) و نورتن (Norton)..... ۶۰
بخش ۳-۲-۱: معادل تونن..... ۶۰
بخش ۳-۲-۲: معادل نورتن..... ۶۷
متناظر بودن معادل تونن و نورتن..... ۶۹
فصل چهارم: تحلیل مدارهای غیر خطی..... ۷۱
مقدمه ای بر مدارهای غیر خطی ۷۱
روشهای تحلیل مدارهایی با عناصر غیرخطی..... ۷۲
نوشتن معادلات ریاضی (Analytical Method) ۷۲
روش گرافیکی یا به قولی خطِ بار (Graphical Method)..... ۷۳
روش تکه ای خطی (Piecewise linear)..... ۷۵
فصل پنجم: دیود و کاربردهای آن ۸۴
بخش ۵-۱: آشنایی با نیمه هادی ها ۸۴
عناصر نیمه هادی ۸۶
بخش ۵-۲: دیود ۸۸
آشنایی با ساختار داخلی دیود..... ۸۸
تحلیل مدارهای دیودی با استفاده از روش برهان خلف..... ۸۹
کاربردهای دیود..... ۹۱
فصل ششم: تقویت کننده های عملیاتی (Op-Amp)..... ۱۰۲
بخش ۶-۱: معرفی Op-Amp و کاربردهای آن..... ۱۰۲
کاربرد Op-Amp ۱۰۲
آشنایی با پایه های Op-Amp و رفتار آن..... ۱۰۳
مدار تقویت کننده وارون نکن..... ۱۰۷
قواعد طلایی اپ امپ..... ۱۰۹
بخش ۶-۲: کاربردهای خطی Op-Amp ۱۰۹
مدار تقویت کننده وارون نکن (Non-inverting Amplifier) ۱۰۹
مدار تقویت کننده وارون کن (Inverting Amplifier)..... ۱۱۰
مدار بافر (Voltage Follower)..... ۱۱۲
مدار جمع کننده (Summing Amplifier)..... ۱۱۴
مدار تفریق کننده (Difference Amplifier)..... ۱۱۷
مبدل جریان به ولتاژ..... ۱۱۸
بخش ۶-۳: استفاده از اپ امپ به صورت غیر خطی ۱۱۹
فصل هفتم: دنیای دیجیتال و ترانزیستورها..... ۱۲۲
بخش ۷-۱: آشنایی با دنیای دیجیتال..... ۱۲۲

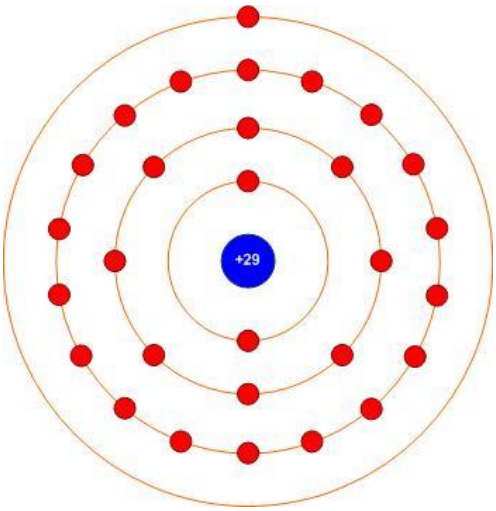
مدارهای دیجیتال و آنالوگ ۱۲۲
موانع انتقال سیگنال ۱۲۲
تاثیر نویز بر سیگنالهای دیجیتال و آنالوگ ۱۲۳
سطوح ولتاژ و نویز مارگین (Noise Margin) ۱۲۳
بخش ۷-۲: مدارهای منطقی و ترانزیستور ۱۲۵
پیاده سازی مدارهای دیجیتال ۱۲۵
آشنایی با ترانزیستور MOSFET نوع N ۱۲۷
ساخت مدارهای دیجیتال با استفاده از ترانزیستور ۱۲۸
بخش ۷-۳: آشنایی با ساختار داخلی MOSFET نوع N ۱۳۱
ولتاژ آستانه روشن شدن (threshold) ۱۳۲
مقاومت R_{ON} ۱۳۲
بخش ۷-۴: محاسبه V_{OH} و V_{OL} و V_{IH} و V_{IL} برای مدارهای ترانزیستوری ۱۳۳
بخش ۷-۵: بررسی برخی خصوصیات الکتریکی گیتهای منطقی ۱۳۵
محاسبه توان مصرفی در یک مدار دیجیتال ۱۳۵
مدل کردن پایه خروجی گیت به صورت منبع ولتاژ غیر ایده آل ۱۳۷
بخش ۷-۶: تکنولوژی CMOS و بهبود مشخصات الکتریکی خروجی (اختیاری) ۱۴۱
توان مصرفی در CMOS ۱۴۲
فصل هشتم: خازن (Capacitor) و کاربردهای آن ۱۴۳
بخش ۸-۱: آشنایی با خازن ۱۴۳
ساختار خازن ۱۴۳
ظرفیت خازن ۱۴۳
اتصال خازن به دو سر منبع تغذیه ۱۴۴
مدت شارژ و دشارژ شدن خازن ۱۴۶
به دست آوردن ولتاژ دو سر خازن در زمانهای مختلف ۱۴۷
جریان گذرا از خازن ۱۴۹
تحلیل مدارهایی با بیش از یک خازن ۱۵۲
بخش ۸-۲: تحلیل سریع مدارهای RC ۱۵۴
بخش ۸-۳: کاربردهای خازن ۱۶۰
ذخیره کردن انرژی ۱۶۰
ذخیره کردن اطلاعات در حافظه های DRAM ۱۶۱
مدار مشتق گیر و مدار انتگرال گیر ۱۶۲
بخش ۸-۴: خاصیت خازنی در MOSFET و تاثیر خاصیت خازنی در دنیای دیجیتال ۱۶۳
مفهوم تاخیر انتشار (propagation delay) در مدارهای دیجیتال ۱۶۹
تاثیر متصل کردن چندین گیت به خروجی گیت ۱۷۰
بخش ۸-۵: انواع خازنهای موجود و خواندن ظرفیت آنها ۱۷۰
ضمیمه الف: طریقه خواندن اندازه مقاومتها ۱۷۲

فصل اول: الفبای الکترونیک

بخش ۱-۱: نگاهی ذره بینی به مفاهیم اولیه الکترونیک

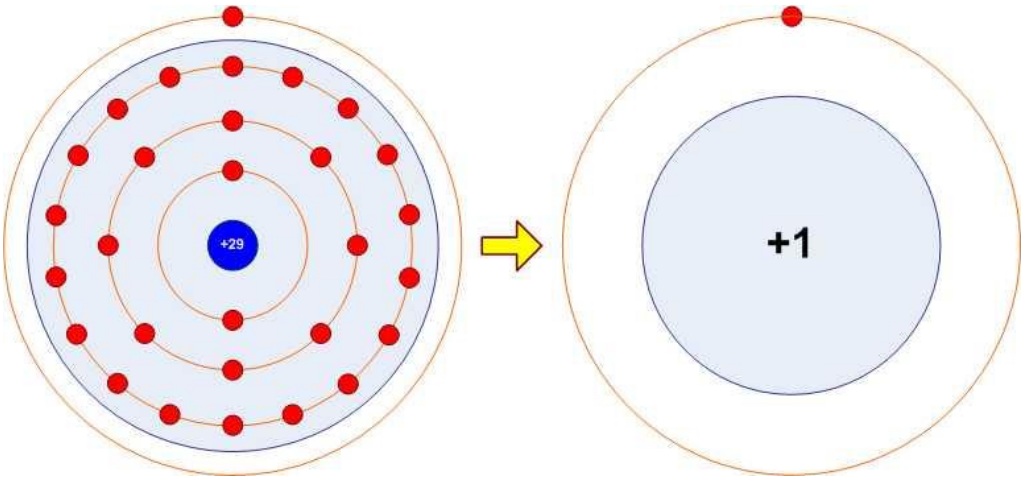
ساختار مواد و بارهای الکتریکی

همان طوری که در دروس شیمی و فیزیک خوانده اید، مواد از اتم ساخته شده اند که داخل هر اتم الکترونها همانند سیاراتی به دور هسته که از پروتون و نوترون تشکیل شده است می گردند. در زیر ساختار یک اتم مس را می بینید.



شکل ۱- ۱: ساختار اتم مس (Cu)

با توجه به اینکه الکترون ها، بار منفی و پروتونها، بار مثبت دارند، بنابراین الکترون ها به طرف هسته اتم که حاوی پروتونها هست، کشیده می شوند. الکترونهایی که در مدارهای نزدیک هسته می چرخند چون که به هسته نزدیک ترند با نیروی قوی تری به سمت هسته اتم کشیده می شوند و الکترونهایی که از هسته دورترند، با نیروی کمتری به سمت هسته کشیده می شوند. به همین خاطر است که در عمل، الکترونهای مدارهای درونی هیچگاه اتم خود را ترک نمی کنند و فقط الکترونهای لایه آخر (لایه ظرفیت) قادر هستند که اتم خود را ترک کنند و به اتم دیگری بروند. با توجه به اینکه الکترونهای لایه های داخلی در جریان الکتریسیته نقشی ایفا نمی کنند، بنابراین می توانیم مدل اتم ها را ساده کنیم و کل هسته و الکترونهای لایه های داخلی را در حکم یک توپی فرض کنیم که الکترونهای لایه ظرفیت به دور آن طواف می کنند که بار الکتریکی این توپ، از حاصل جمع بار پروتونهای هسته و الکترونهای لایه های داخلی به دست می آید. شکل زیر را ببینید.



شکل ۱- ۲: ساده کردن اتم مس به یک الکترون که به دور توپی می چرخد

هنگامی که ماده ای خنثی باشد، تعداد الکترونها و پروتونهای آن برابر است و یا به عبارت دیگر، بار توپ مرکزی قرینه بار الکترونهای لایه ظرفیت است. اما در ماده ای که الکترونهای لایه ظرفیت آن به مسافرت رفته باشند، ماده دارای بار مثبت می شود و ماده ای که پذیرای تعدادی الکترون شده باشد دارای بار منفی می شود.

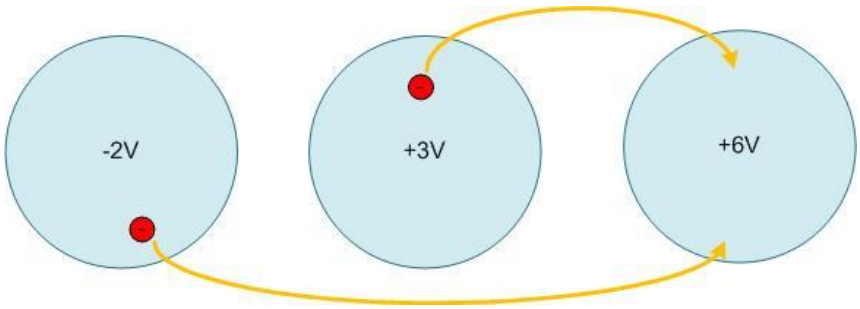
پتانسیل و اختلاف پتانسیل

همان طور که می دانید بارهای الکتریکی هم نام، همدیگر را دفع می کنند. بنابراین اگر ماده ای بار منفی داشته باشد و تراکم الکترون در آن زیاد باشد، الکترونها تمایل دارند که به محلی که تراکم بارهای منفی کمتر است بروند.

یک بادکنک پر از باد را در نظر بگیرید. هنگامی که سر آن را باز کنیم، باد از بادکنک بیرون می زند. زیرا مولکولهای هوا در داخل بادکنک متراکم شده اند و مایلند که به جایی که تراکم هوا کمتر است بروند. الکترونها نیز به همین صورت عمل می کنند و مایلند که از جایی که تراکم الکترون بالا است به محلی که تراکم الکترون کمتر است بروند.

میزان تمایل الکترون برای حضور داشتن در هر محل را با پتانسیل (ولتاژ) بیان می کنند و واحد آن ولت است و با حرف V نمایش داده می شود. در محلهایی که تراکم الکترون زیاد باشد، الکترون مایل است که آن محل را ترک کند و پتانسیل در آن نقطه منفی است. همچنین الکترون تمایل دارد به محلی برود که تراکم الکترون در آن کم باشد که پتانسیل چنین محلی مثبت است. هر چه تراکم الکترون در محلی کمتر باشد، پتانسیل آن محل مثبت تر است.

الکترونها همیشه مایلند از محلی که تراکم الکترون بیشتر است به محلی که تراکم الکترون کمتر است بروند. به عبارت دیگر، اختلاف پتانسیلی که بین دو نقطه وجود دارد نشان می دهد که چه مقدار الکترونها علاقه دارند که بین آن نقاط جابجا شوند. مثلا اگر پتانسیل نقطه ای ۲- و در نقطه دیگر ۳+ و در نقطه دیگری ٦+ باشد، الکترون ها از بین این سه نقطه، تمایل دارند که به محلی بروند که ولتاژ آن ٦+ ولت است.

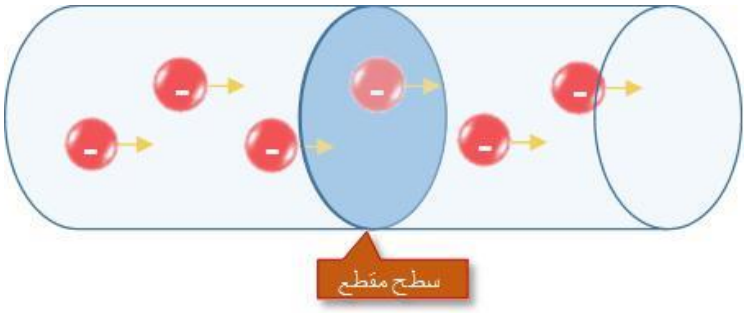


شکل ۱-۳: تمایل الکترون به رفتن به محلی که پتانسیل الکتریکی آن بیشتر است

جریان

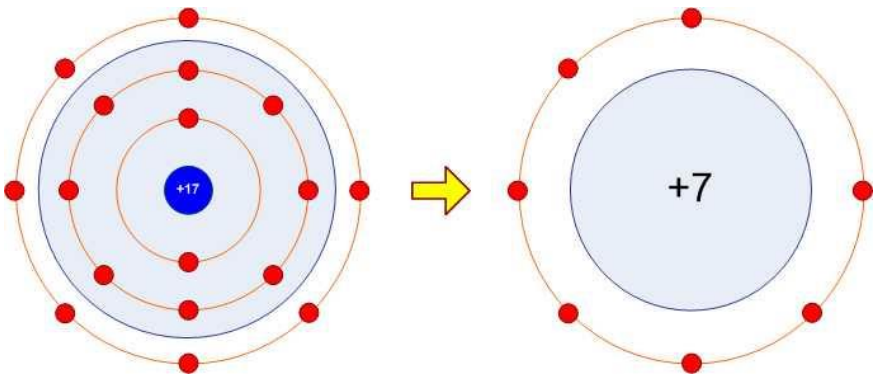
هنگامی که به دو سر ماده ای اختلاف پتانسیلی را اعمال کنیم، الکترونها تمایل دارند که از محلی که از پتانسیل منفی که تراکم الکترون در آن زیاد است بگریزند و به سمت پتانسیل مثبت که در آن بار مثبت است حرکت کنند. هنگامی که الکترونها در ماده ای جابجا شود می گوییم که در آن ماده جریان ایجاد شده است. جریان بیان می کند که در هر ثانیه چه مقدار بار الکتریکی از سطح مقطعی از شی عبور می کنند و از رابطه Q/T به دست می آید که در این رابطه q مقدار بار الکتریکی گذرا از سطح مقطع شی است و T مدت زمانی است که این بار الکتریکی از آن عبور کرده است. جریان را همچنین می توانیم از رابطه dq/dt نیز حساب کنیم. جریان با حرف i نمایش داده می شود و واحد اندازه گیری جریان، آمپر (Ampere) است.

برای اینکه مفهوم جریان ملموس تر شود یک خیابان را در نظر بگیرید. برای اینکه میزان تردد اتومبیل در خیابانی را اندازه بگیریم می توانیم در نقطه ای از این خیابان بایستیم و تعداد اتومبیلهایی که از روبروی ما عبور می کنند را بشماریم و حساب کنیم که در ثانیه چند تا اتومبیل از روبروی ما عبور می کند و آن را میزان تردد اتومبیل در خیابانها قرار دهیم. مفهوم جریان هم دقیقا همین گونه است.



مواد رسانا و نارسانا

گفتیم که می توانیم ساختار اتم را به صورت الکترونهای لایه ظرفیت که به دور توپ مرکزی می گردند مدل سازی کنیم. اگر در عنصری یک اتم در لایه ظرفیت باشد، بار توپ مرکزی ۱+ است و بنابراین کششی به اندازه ۱+ به اتم لایه ظرفیت وارد می شود. در حالی که در عنصری که ۸ تا الکترون لایه ظرفیت دارند کششی به اندازه ۸+ به هر الکترون وارد می شود. پس در اتمهایی که تعداد الکترونهای لایه ظرفیت کم است، کشش کمی به الکترونهای لایه ظرفیت وارد می شود و الکترونها به سهولت می توانند از اتم جدا شوند و به اتم دیگری بروند و بنابراین رسانا هستند. به طور مثال، در شکل ۱-۲ ساختار اتم مس را می بینید که یک رسانای بسیار قوی است. به طور مقابل، در اتمهایی که تعداد الکترونهای لایه ظرفیت زیاد و به تبع آن بار توپ مرکزی زیاد است، الکترونها محکم به اتم چسبیده اند و الکترونها در برابر جدا شدن از اتم خود و جابجا شدن مقاومت می کنند. بنابراین اگر اختلاف پتانسیلی به دو سر این مواد اعمال کنیم، الکترونهای اندکی حاضر می شوند که اتم خود را ترک کنند و در نتیجه رسانای ضعیف و یا نارسانا هستند. در شکل ۱-٤، ساختار اتم کلر را می بینید که در آن ۷ تا الکترون در لایه ظرفیت وجود دارد و هر الکترون به نیروی ۷+ به طرف داخل اتم کشیده می شود و بنابراین نارسانا می باشد.

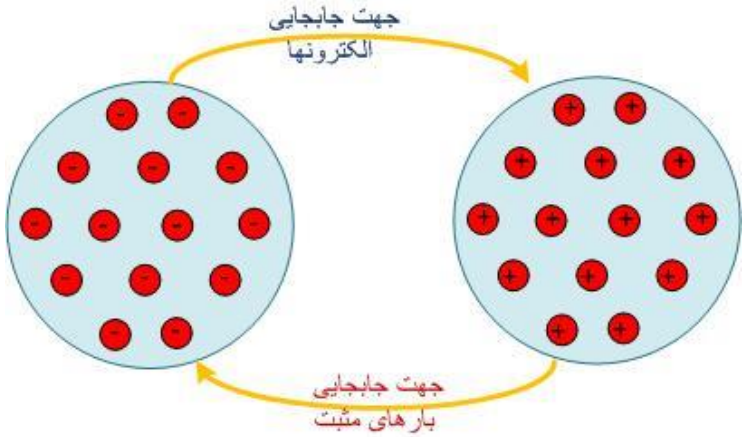


شکل ۱-۴: ساختار اتم کلر (Cl)

قانون اهم ($V = iR$) نیز در حقیقت، همین مفاهیم را به صورت ماکروسکوپیک بیان می کند. طبق قانون اهم، اگر ولتاژ یکسانی را به دو سر مواد مختلف متصل کنیم، هر چه الکترونها محکمتر به اتم خود متصل باشند مقاومت بیشتری در برابر برقراری جریان می کنند و جریان کمتری در ماده برقرار می شود.

قراردادهای اولیه در الکترونیک

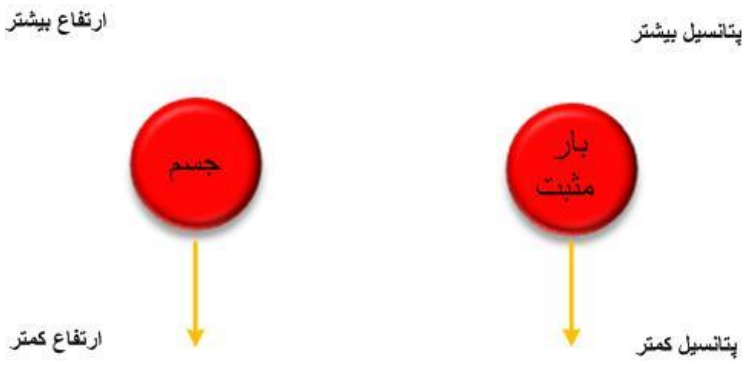
بشر تحقیق در زمینه الکترونیک را از دوران بسیار دور آغاز کرده است؛ یعنی مدتها قبل از اینکه ساختار اتم برایش شناخته شود. تصور اولیه بشر بر این بود که این بارهای الکتریکی مثبت هستند که در مواد جابجا می شوند. اگر چه در واقعیت الکترونها بین مواد جابجا می شوند ولی در عمل فرقی نمی‌کند. چه بگوییم که بارهای مثبت از محلی که پتانسیل آن کمتر است به سمت ماده ای که پتانسیل آن بیشتر است حرکت می کند، چه بگوییم بارهای مثبت از جایی که تراکم بار مثبت زیاد است به سمت جایی که تراکم بارهای مثبت کمتر است حرکت می کنند، فرقی در تحلیل ما نمی‌کند. شکل زیر را ببینید.



شکل ۱-۵: جهت جابجایی قراردادی در مقایسه با جهت جابجایی الکترونها

پتانسیل از دیدگاه جهت قراردادی

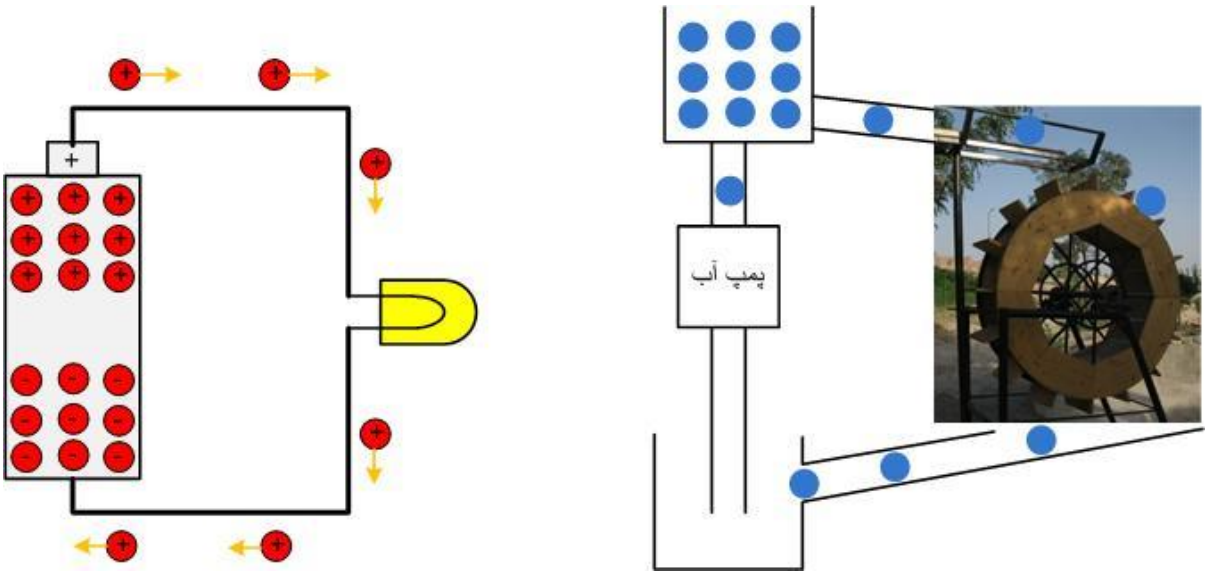
بنابراین برای اینکه از قراردادهای پیشینیان پیروی کنند، در الکترونیک فرض بر این است که بارهای مثبت در مدار در حرکت هستند. نقطه ای که پتانسیل الکتریکی آن مثبت تر است را می توانیم همانند نقطه ای در نظر بگیریم که ارتفاع بیشتری از سطح زمین دارند. همان طور که اجسام مایلند به طرف محلی که ارتفاع کمتری دارد حرکت کنند، بارهای مثبت نیز مایلند که به محلی با پتانسیل الکتریکی کمتر حرکت کنند.



شکل ۱-۶: پتانسیل در مقایسه با ارتفاع

بنابراین باتری (یا منبع تغذیه) را می توانیم به صورت شیی در نظر بگیریم که یک سر آن تراکم بار مثبت زیاد است و بارهای مثبت تمایل دارند که به سر دیگر آن تراکم بار مثبت کم است بروند و اگر مسیری بین دو سر آن فراهم شود، بارهای مثبت به سمت سر منفی حرکت می کنند.

همچنین باتری را می توانیم مانند یک پمپ آب تصور کنیم که قطرات آب را از ارتفاعی پایین به ارتفاعی بالا می برد و این آب که در ارتفاع بالا قرار گرفته، پتانسیل آن را دارد که به سمت ارتفاع پایین جریان پیدا کند و در طول مسیر اگر آسیابی باشد قادر است که آن آسیاب را بچرخاند. در باتری نیز بارهای مثبت همانند قطرات آب هستند که می توانند در مدار جاری شوند و وسایل الکتریکی که در مدار هستند را همانند آسیاب به حرکت درآورند.

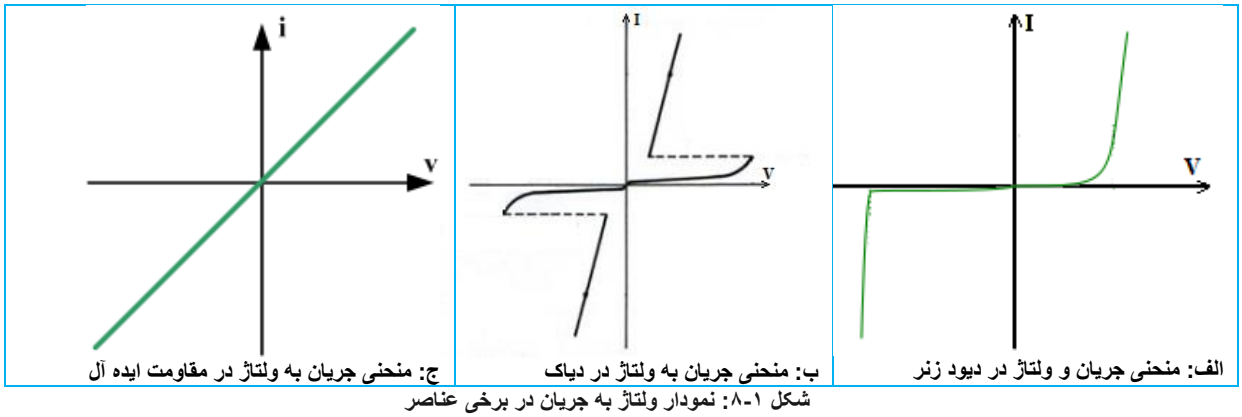


شکل ۱-۷: جریان بارهای مثبت در مدار و قیاس آن با جاری شدن آب از سر کوه

بخش ۱-۲: آشنایی با برخی از عناصر استفاده شونده در مدار

مقاومت

مقاومت عنصری است که انرژی الکتریکی را مصرف می کند. هنگامی که ما ولتاژی را به دو سر شیی، اعمال کنیم، جریانی از آن عبور می کند. مثلا اگر به دو سر یک سیب و یا گوجه فرنگی ولتاژی را اعمال کنیم مقداری جریان از آن عبور می کند که هر چه شی رساناتر باشد جریان بیشتری از آن عبور می کند. رابطه بین ولتاژی که به دو سر شیی اعمال می کنیم با جریانی که از آن عبور می کند را می توانیم به صورت نموداری ترسیم کنیم که شکل این نمودار در وسایل مختلف متفاوت است. در شکل زیر، نمودار ولتاژ به جریان برخی عناصر را می بینید.



الف: منحنی جریان و ولتاژ در دیود زنر **ب: منحنی جریان به ولتاژ در دیاک** **ج: منحنی جریان به ولتاژ در مقاومت ایده آل**

شکل ۱-۸: نمودار ولتاژ به جریان در برخی عناصر

در مقاومت ایده آل، رابطه بین ولتاژی که به دو سر آن اعمال می کنیم و جریان گذرا از آن، به صورت خطی راست است. شکل ۱–۸–ج را ببینید. به عبارت دیگر در مقاومت ایده آل مقدار مقاومت همیشه ثابت است و با تغییر کردن ولتاژ مقدار

مقاومت تغییر نمی کند. بنابراین اگر رابطه اهم (V = iR) را برای مقاومت ایده آل بنویسیم، مقدار R (مقاومت) در آن ثابت است.

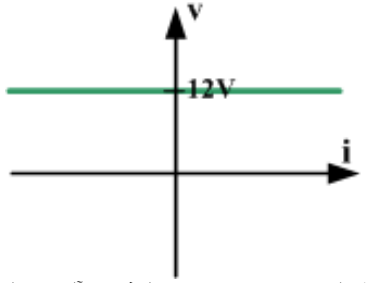
شکل ۱- ۹

برای نشان دادن مقاومت ایده آل از سمبل روبرو استفاده می کنیم.

در عمل، کمتر عنصری را می توان پیدا کرد که رابطه بین جریان و ولتاژ آن خط راست باشد، اما با کمی اغماض می توانیم بسیاری از وسایل الکتریکی (مثل کولر، جاروبرقی و یا یک بخاری برقی و ...) را با مقاومت ایده آل، مدل سازی کنیم.

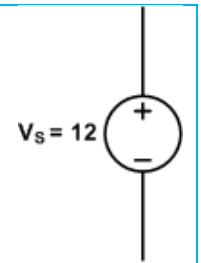
منابع ولتاژ

وسایل برقی برای اینکه بتوانند کار کنند نیاز به مصرف انرژی دارند. این انرژی از طریق باتری، برق شهر و غیره فراهم می شود. منابع ولتاژ عناصری هستند که همیشه مقدار ولتاژ مشخصی بین دو سر آنها وجود دارد. مثلا باتری‌های ۱.۵ ولت، اختلاف پتانسیلی به اندازه ۱.۵ ولت در دو سر خود دارند.



شکل ۱-۱۰: نمودار منبع ولتاژ ایده آل ۱۲ ولت

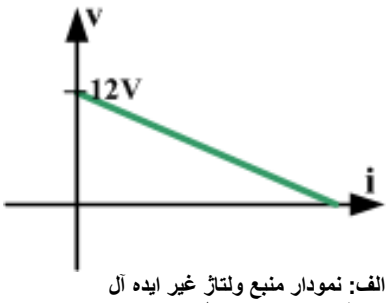
منابع ولتاژ ایده آل را عناصری در نظر می گیریم که مقدار جریان گذرا از آنها تاثیری بر ولتاژ دو سر آنها ندارد. مثلا اگر منبع ولتاژ ایده آلی ۱۲ ولت است، هر چقدر هم از آن جریان بکشیم ولتاژ دو سر آن همچنان ۱۲ ولت باقی می ماند یعنی حتی اگر جریان بی نهایت از آن عبور کند، ولتاژ دو سر آن همچنان برابر ۱۲ ولت باقی می ماند. (شکل ۱–۱۰)



شکل ۱-۱۱: منبع ولتاژ ایده آل ۱۲ ولت

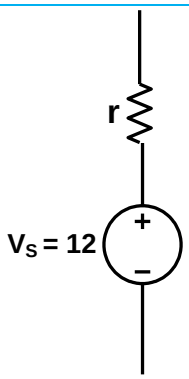
برای نمایش دادن منابع ولتاژ ایده آل، از سمبلی که در شکل ۱–۱۱ نمایش داده شده استفاده می شود که با علامتهای + و – قطبهای منبع را نشان می دهیم و با عددی که کنار آن می نویسیم ولتاژ دو سر آن را اعلام می کنیم. به طور مثال، منبعی که در شکل ٤ نمایش داده شده، یک منبع ولتاژ ایده آل ۵ ولت است.

در منابع ولتاژ واقعی، معمولا هنگامی که از آنها جریان بکشیم ولتاژ آنها شروع به افت می کند. (شکل ۱–۱۲–الف) رفتار منابع ولتاژ غیر ایده آل را می توانیم با استفاده از یک منبع ولتاژ ایده آل که با آن مقاومتی سری شده است مدل کنیم. (شکل ۵–ب)



الف: نمودار منبع ولتاژ غیر ایده آل

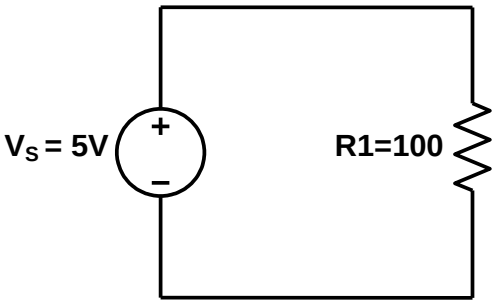
همانطور که در این شکل می بینید، هر چه جریان کشیده شده از منبع ولتاژ واقعی، بیشتر باشد ولتاژ دو سر منبع، بیشتر افت می کند تا اینکه سرانجام ولتاژ آن به صفر می رسد.



ب: مدلی برای منبع ولتاژ غیر ایده آل

شکل ۱- ۱۲: منبع ولتاژ غیر ایده آل

مثال ۱-۱: در مدار روبرو، مقاومتی را به دو سر منبع ولتاژی متصل کرده ایم. جریان گذرا از مقاومت را حساب کنید.



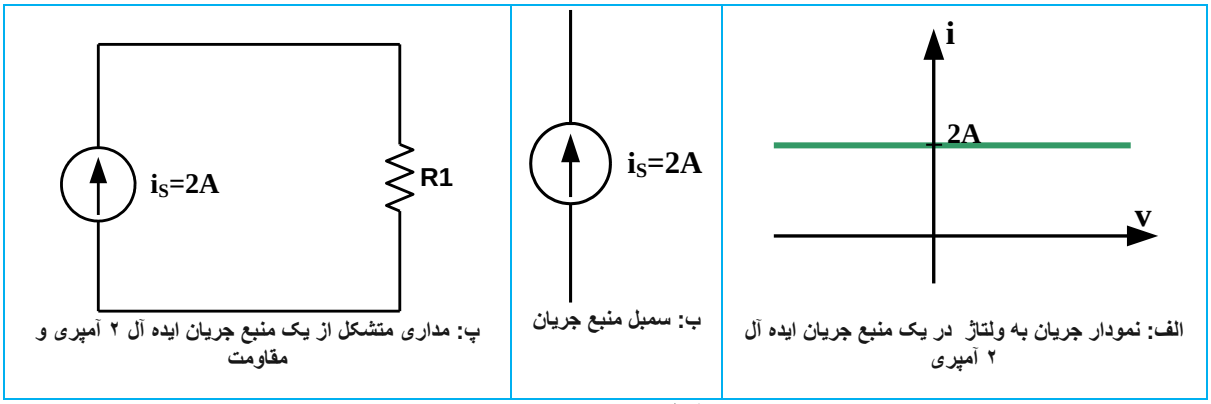
حل: برای محاسبه کردن جریان گذرا از مقاومت، از قانون اهم استفاده می کنیم. می دانیم که ولتاژ دو سر مقاومت، ۵ ولت است و مقدار مقاومت ۱۰۰ اهم است. پس با استفاده از قانون اهم داریم:

$V=IR \rightarrow 5 = I * 100 \rightarrow I = 5 / 100 = 50\ mA$

رفتار منبع ولتاژ و مقاومت را به طور تمثیلی می توان مانند پمپ آب و توربینی در نظر گرفت. منبع ولتاژ همانند پمپ آبی، قطرات آب را به سطح بالاتری می برد و این قطرات هنگامی که بر توربین می ریزد، به سطح پتانسیل کمتری می رسد و در عین حال توربین را به چرخش در می آورد که چرخش توربین می تواند کاری را انجام دهد.

منابع جریان

منابع جریان، عناصری هستند که همیشه جریان مشخصی را از خود عبور می دهند. مثلا اگر یک منبع جریان ایده آل ۲ آمپری داشته باشیم همیشه جریان ۲ آمپر را از خود عبور می دهد، فرقی نمی‌کند که عناصر متصل به آن چه باشند. (شکل ۱۳-۱) بنابراین اگر مقاومتی را مطابق شکل۱۳-۱-پ به دو سر منبع جریان متصل کنیم، همیشه جریان ۲ آمپر از مقاومت می‌گذرد. فرقی نمی‌کند که مقدار مقاومت چقدر باشد. در شکل۱۳-۱-ب نماد مربوط به منبع جریان را می بینید. جهت فلش مشخص می‌کند که جهت جریان به کدام سو است و عددی که کنار آن نوشته شده، بیان می کند که چه جریانی از منبع جریان می گذرد.



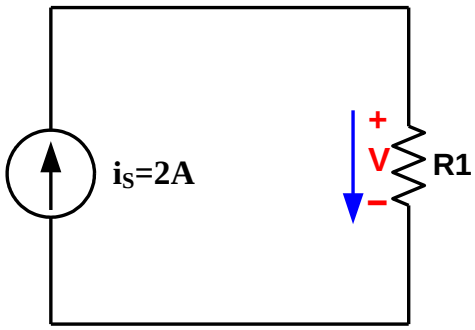
الف: نمودار جریان به ولتاژ در یک منبع جریان ایده آل ۲ آمپری

ب: سمبل منبع جریان

پ: مداری متشکل از یک منبع جریان ایده آل ۲ آمپری و مقاومت

شکل ۱-۱۳: منبع جریان

مثال ۱-۲: در مدار شکل ۱-۱۳-پ، اگر مقدار مقاومت ۱۰ اهم باشد، حساب کنید که ولتاژ دو سر مقاومت چقدر است.



حل: برای محاسبه کردن ولتاژ دو سر مقاومت، از قانون اهم استفاده می‌کنیم. می دانیم که جریان گذرا از مقاومت، ۲ آمپر است و مقدار مقاومت ۱۰ اهم است. پس با استفاده از قانون اهم داریم:

$V=IR = 2 * 10 = 20\ V$

همیشه هنگامی که در جهت جریان از مقاومتی عبور کنیم، ولتاژ بر روی مقاومت افت می کند. یعنی قبل از عبور کردن از مقاومت، ولتاژ بیشتر از نقطه ای است که پس از عبور کردن از مقاومت به آن می رسیم. به عبارتی، اگر فلش جهت جریان را در کنار مقاومتی رسم کنیم در کنار ته فلش جریان، قطب مثبت و در کنار سر فلش جریان، قطب منفی است. بنابراین قطبیت ولتاژ دو سر مقاومت به صورت نمایش داده شده در شکل است.

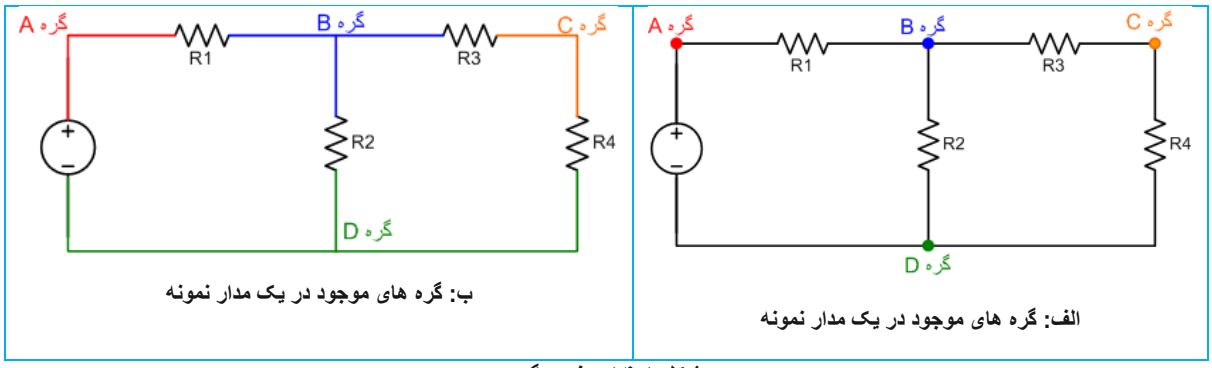
بخش ۱-۳: آشنایی با روابط حاکم بین اجزای مدار

آشنایی با چند اصطلاح

قبل از اینکه مطالب درسی را ادامه دهیم خوبست که با چند اصطلاح آشنا شویم تا در ادامه با بکارگیری این اصطلاحات بتوانیم منظورمان را بهتر بیان کنیم.

گره(Node)

به محل تلاقی چندین عنصر، گره میگوییم. (شکل ۱-۱٤-الف) در عمل ما هنگامی که لفظ گره را بیان می کنیم به دنبال سطوح هم پتانسیل هستیم. پس جمیع نقاطی که با سیم به یک محل تلاقی متصل هستند، جزء همان گره هستند. (شکل ۱-۱٤-ب)



الف: گره های موجود در یک مدار نمونه

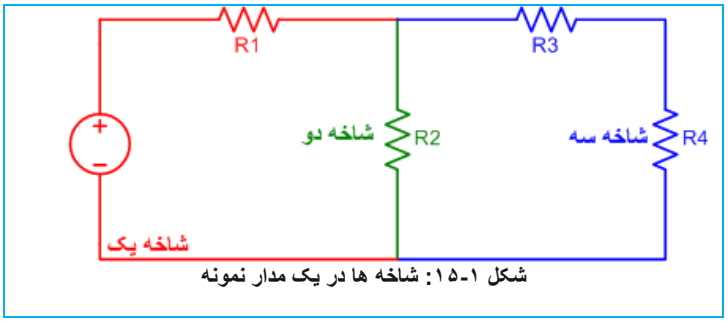
ب: گره های موجود در یک مدار نمونه

شکل ۱-۱٤: مفهوم گره

برای اینکه گره های مدار را مشخص کنیم، از نقطه ای از مدار شروع به حرکت می کنیم. تا مادامی که از عنصری عبور نکرده ایم، در همان گره قبلی هستیم اما به مجرد اینکه از عنصری بگذریم وارد گره جدیدی شده ایم و بنابراین اگر این گره را قبلا نامگذاری نکرده ایم به آن نامی اختصاص می دهیم.

شاخه (Branch)

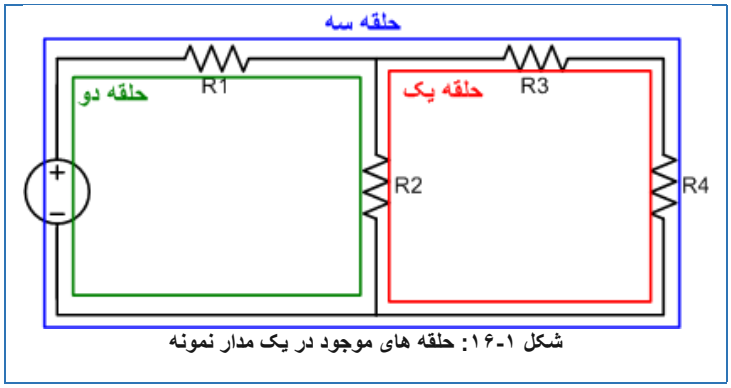
یک لوله آب را در نظر بگیرید. قطرات آب همسانی از درون تمام لوله میگذرد. شاخه نیز عناصر پشت سرهمی هستند که الکترونهای همسانی از آنها عبور میکند. بنابراین تا زمانی که به انشعابی (سه راهی یا چهار راهی) نرسیده باشیم در شاخه قبلی قرار داریم. (شکل ۱-۱۵)



شکل ۱-۱۵: شاخه ها در یک مدار نمونه

حلقه (Loop)

حلقه، یک مسیر بسته است. یعنی از یک نقطه از مدار شروع به حرکت کنیم و از عناصر مختلف میگذریم و به همان نقطه بازگردیم، مشروط به اینکه در طول مسافرت، از نقطه تکراری ای عبور نکنیم.



شکل ۱-۱۶: حلقه های موجود در یک مدار نمونه

قوانین کیرشهف

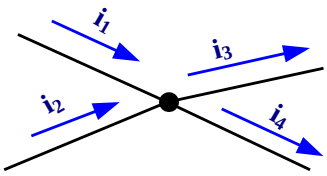
قاعده جمع جریان (KCL)

اگر یک جوی آب را در نظر بگیریم در هر قسمتی از این جویبار، همان قطراتی که وارد جویبار می شوند همانها نیز می گذرند و خارج می شوند و بنابراین اگر چندین جویبار به هم برسند و یا جویی به چندین شاخه، منشعب شود، همیشه مجموع قطرات وارد شده برابر مجموع قطرات خارج شده است و اگر تعداد قطرات وارد شده را با عددی مثبت و تعداد قطرات خارج شده را با عددی منفی بیان کنیم جمع جبری این اعداد صفر است. در مدارهای الکتریکی نیز چنین است. الکترونها در حکم قطرات آب هستند و جریان، در واقع حجم آب گذرا را نشان می دهد. پس در هر نقطه از مدار جمع جبری جریانها صفر است.

قاعده KCL:
در هر گره از مدار جمع جبری جریانهای وارد شده و جریانهای خارج شده صفر است.

مثال ۱-۳:

اگر در شکل زیر i_1 برابر ۲ آمپر و i_2 برابر ۵ آمپر و i_3 برابر ۳ آمپر باشد، جریان i_4 را محاسبه کنید.



حل: در این مدار جریان i_1 و i_2 وارد شونده و جریانهای i_3 و i_4 خارج شونده هستند. اگر جریانهای وارد شونده را مثبت و جریانهای خارج شونده را منفی بگیریم داریم:

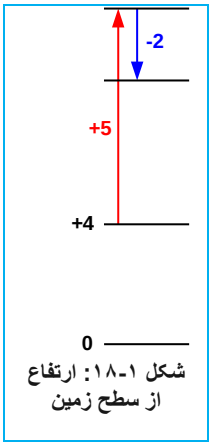
$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0 \rightarrow 2 + 5 - 3 - i_4 = 0 \rightarrow i_4 = 4$$

قاعده جمع ولتاژ (KVL)

شکل روبرو را در نظر بگیرد. ما اگر بدانیم که ولتاژ در سر پایین منبع ولتاژ، ٤ ولت است با توجه به اینکه در این شکل، ولتاژ دو سر منبع ولتاژ ٥ ولت است، پس ولتاژ سر مثبت آن ٥ ولت بیشتر از سر منفی آن است و بنابراین ولتاژ سر مثبت منبع ولتاژ، ۹V = ٥ + ٤ ولت خواهد بود. در این مدار اگر سر سمت چپ مقاومت R۱ دارای قطبیت مثبت و سر سمت راست آن دارای قطبیت منفی باشد، با توجه به اینکه اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۲ ولت است و ولتاژ سر سمت چپ آن ۹ ولت است، پس ولتاژ سر سمت راست آن برابر است با:

شکل ۱-۱۷: قسمتی از یک مدار

$$+9V - 2 = +7V$$

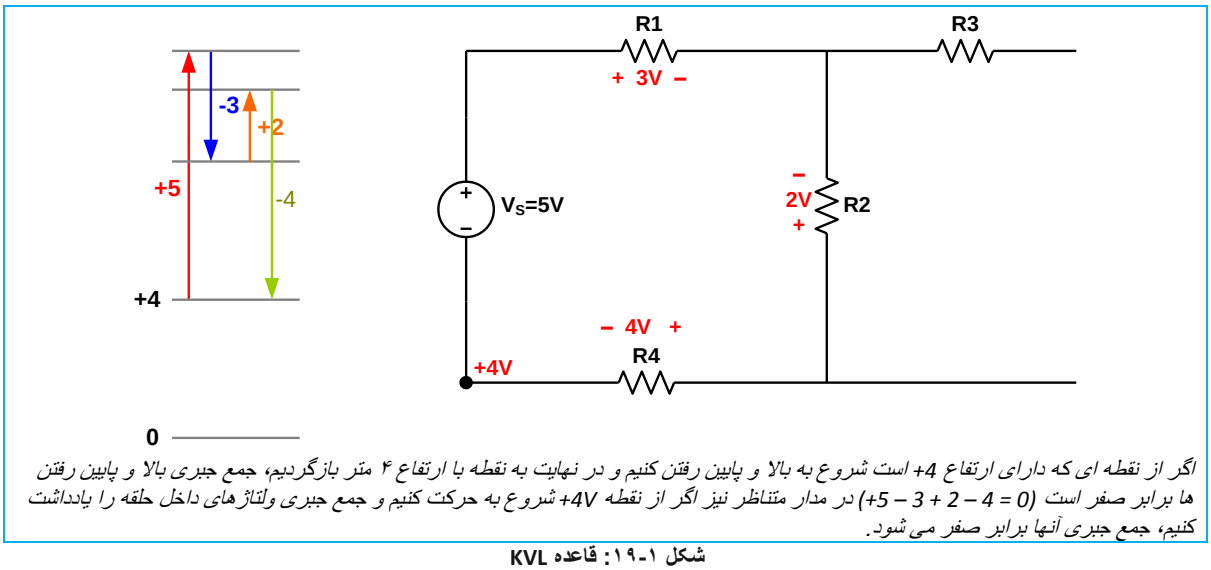


شکل ۱-۱۸: ارتفاع از سطح زمین

در کل، اگر ولتاژ نقطه ای از مداری را داشته باشیم و بخواهیم ولتاژ نقطه دیگری را به دست آوریم، از نقطه ای که ولتاژ آن را می دانیم به سمت نقطه مجهول شروع به حرکت می کنیم. در مسیر حرکت هر گاه از قطب مثبت عنصری به قطب منفی آن رفتیم از ولتاژ کم می کنیم و هرگاه از قطب منفیِ عنصری به قطب مثبت رفتیم، ولتاژ را زیاد می کنیم. این کار درست همانند محاسبه کردن ارتفاع

یک نقطه از سطح زمین است، اگر ارتفاع نقطه ای از سطح زمین را داشته باشیم و بخواهیم ارتفاع نقطه دیگری را نسبت به زمین حساب کنیم می توانیم با جمع و تفریق کردن، ارتفاع نقطه جدیدی را به دست آوریم. (شکل ۱-۱۸)

در این مثالِ ارتفاع، ارتفاع هر نقطه از زمین، مقدار مشخصی است و هر چقدر هم بالا و پایین برویم هنگامی که به نقطه مشخصی برگردیم ارتفاع ما از زمین همچنان ثابت خواهد بود و تغییر ارتفاع ما نسبت به آغاز، صفر است. پس در مدار نیز اگر یک دور بزنیم و به نقطه اول برگردیم ولتاژ گره همانی خواهد بود که در ابتدا بوده و جمع جبری ولتاژهای مسیر، صفر است. (شکل ۱-۱۹)



اگر از نقطه ای که دارای ارتفاع 4+ است شروع به بالا و پایین رفتن کنیم و در نهایت به نقطه با ارتفاع ۴ متر بازگردیم، جمع جبری بالا و پایین رفتن ها برابر صفر است (0 = 4 – 2 + 3 – 5+) در مدار متناظر نیز اگر از نقطه 4V+ شروع به حرکت کنیم و جمع جبری ولتاژهای داخل حلقه را یادداشت کنیم، جمع جبری آنها برابر صفر می شود.

شکل ۱-۱۹: قاعده KVL

قاعده KVL:
در هر حلقه، جمع جبری ولتاژها صفر است.

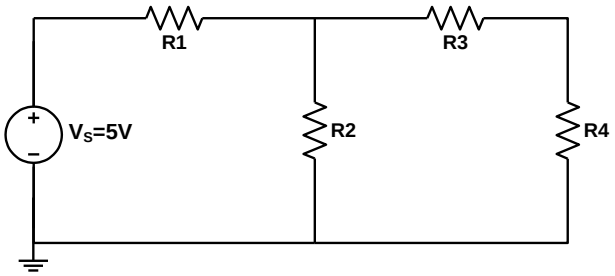
تحلیل مدارها به روش بنیادی (Fundamental method)

اگر بخواهیم مداری را با استفاده از روش بنیادی (قوانین کیرشهف) تحلیل کنیم، گامهای زیر را می بایست طی کنیم:

۱. ابتدا جریان شاخه ها را نامگذاری می کنیم و جهت جریانها را به هر جهتی که مایلیم می‌کشیم.
۲. از روی جریان شاخه ها، ولتاژهای دو سر مقاومتها را علامتگذاری می‌کنیم. ولتاژها را طوری علامتگذاری می‌کنیم که جریان از سر مثبت مقاومت، به سر منفی برود.
۳. اگر برای ولتاژ و جریان هر یک از عناصر، روابطی داریم آن را می‌نویسیم.
۴. قوانین جریان و ولتاژ کیرشهف را برای مدار می‌نویسیم.
۵. معادلاتی که نوشته ایم را حل می کنیم تا جریان و ولتاژ عناصر بدست آید.

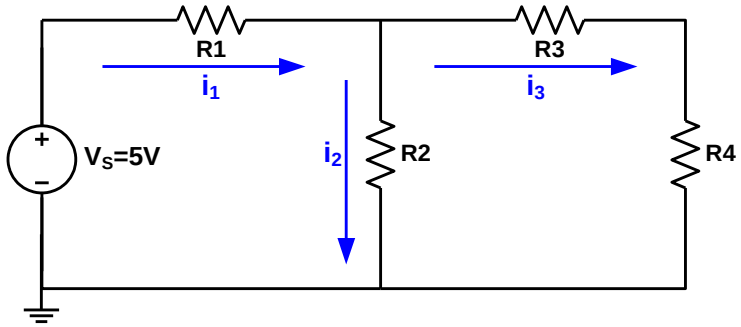
به طور نمونه مثال زیر را ببینید.

مثال ۱-۴: در مدار زیر، جریان گذرا از شاخه های مختلف مدار را حساب کنید

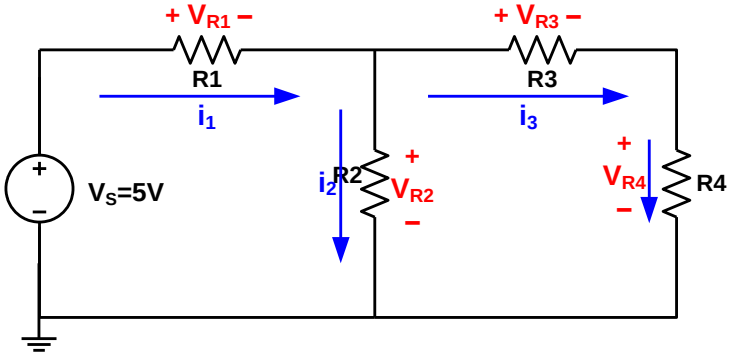


حل:

۱. ابتدا جریان شاخه ها را نامگذاری می کنیم



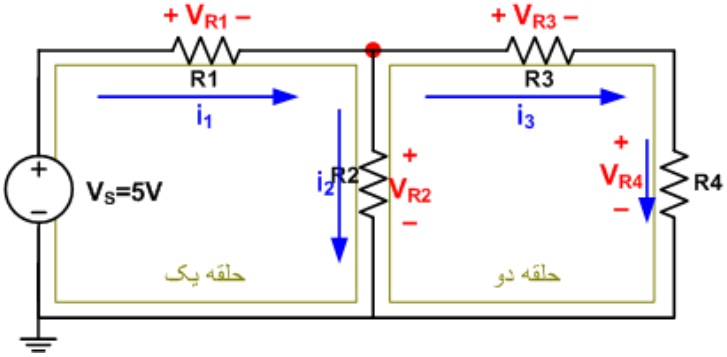
۲. از روی جریان شاخه ها، ولتاژهای دو سر مقاومتها را علامتگذاری می‌کنیم. توجه داریم که علامت – می بایست کنار سر فلش جریان و علامت + کنار ته فلش جریان قرار گیرد. (جریان از سر مثبت مقاومت، به سر منفی برود.)



۳. روابطی که برای ولتاژ و جریان هر یک از عناصر، داریم می‌نویسیم.

$$V_{R1} = i_1R_1 \quad ; \quad V_{R2}=i_2R_2 \; ; \; V_{R13} = i_3R_3 \quad ; \quad V_{R4}=i_3R_4$$

۴. قوانین جریان و ولتاژ کیرشهف را برای مدار می‌نویسیم.



$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

برای حلقه یک داریم:

$$V_S - V_{R1} - V_{R2} = 0$$

برای حلقه دو داریم:

$$V_{R2} - V_{R3} - V_{R4} = 0$$

۵. معادلاتی که نوشته ایم را حل میکنیم تا جریان و ولتاژ عناصر بدست آید.

با جایگذاری مقدار ولتاژها در معادله مربوط به حلقه یک داریم:

$V_{R1} = i_1R_1$; $V_{R2}=i_2R_2$; $V_S - V_{R1} - V_{R2} = 0$ ➔ $5V - i_1R_1 - i_2R_2 = 0$

با جایگذاری مقدار ولتاژها در معادله مربوط به حلقه دو داریم:

$V_{R2}=i_2R_2$; $V_{R13} = i_3R_3$; $V_{R4}=i_3R_4$; $V_{R2} - V_{R3} - V_{R4} = 0$ ➔ $i_2R_2 - i_3R_3 - i_3R_4 = 0$

بنابراین ما به سه معادله و سه مجهول زیر می رسیم که با حل کردن آن می توانیم مقدار جریانهای شاخه ها را حساب کنیم و از روی آن ولتاژ دو سر مقاومتها و ولتاژ گره های مختلف مدار را محاسبه کنیم:

$$5V - i_1R_1 - i_2R_2 = 0$$

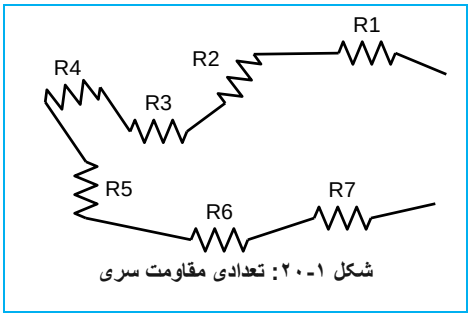
$i_2R_2 - i_3R_3 - i_3R_4 = 0$

$i_1 - i_2 - i_3 = 0$

مدارهای سری و موازی

مدارهای سری

تعریف سری بودن دو عنصر



شکل ۱-۲۰: تعدادی مقاومت سری

در مسیر یک جوی آب، تا مادامی که انشعابی ایجاد نشود، قطرات آب یکسانی از داخل مسیر عبور می کند فرقی نمی کند که جنس مسیر از خاک یا سفال یا لوله باشد. اما به مجرد اینکه به انشعابی برسیم قطرات آب در مسیرهای مختلف به راه خود ادامه می دهند. در مدارهای الکتریکی نیز در صورتی که چندین عنصر پشت سرهم قرار گرفته باشند بدون اینکه بین آنها انشعابی ایجاد شود (بدین معنی که هنگام راه رفتن بر روی این عناصر به سه راه یا چهار راهی برخورد نکنیم) می گوییم که این عناصر سری هستند. شکل ۲۰-۱ را ببینید.

هنگامی که عناصری سری باشند تعداد الکترونهای یکسانی از داخل همه آنها عبور می کند و بنابراین جریان گذرا از عناصر سری با هم برابر است.

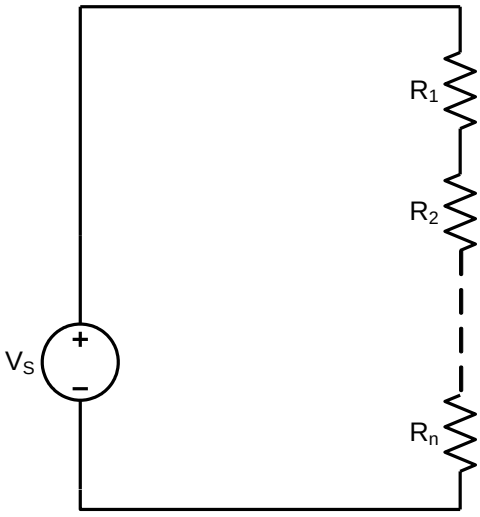
مقاومت معادل در مدارهای سری

همان طور که در شکل ۱-۲۱ می بینید، تعدادی مقاومت را با هم سری کرده ایم. این مقاومتها را می‌خواهیم با یک مقاومت جایگزین کنیم به گونه ای که با همین منبع ولتاژ، جریان گذرا از مدار تغییر نکند.

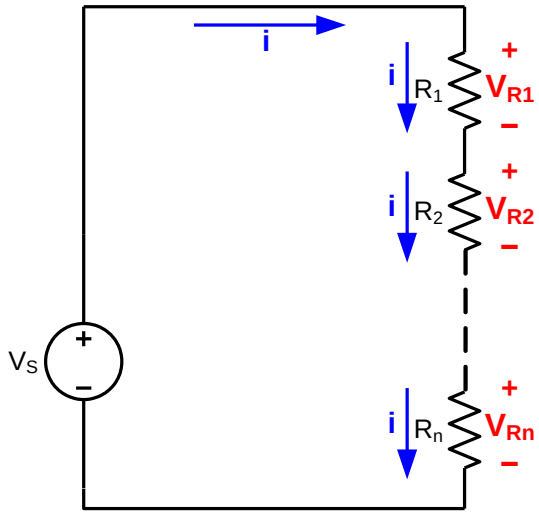
ابتدا بدست آوریم که در حال حاضر چه جریانی از مقاومتها عبور می‌کند.

با توجه به اینکه این مقاومتها با هم سری هستند، پس جریان گذرا از همه آنها یکسان است (شکل ۱-۲۲) و ولتاژ دو سر هر یک از مقاومتها از ضرب کردن جریان در مقاومت آنها به دست می آید:

$V_{R1} = iR_1$; $V_{R2} = iR_2$; .... ; $V_{Rn} = iR_n$



شکل ۱-۲۱: یک مدار سری



شکل ۱-۲۲: یک مدار سری و جهت جریان و قطبیت ولتاژها در آن

قانون KVL را برای مدار می نویسیم:

$+V_S - V_{R1} - V_{R2} - \dots - V_{Rn} = 0 \rightarrow +V_S - iR_1 - iR_2 - \dots - iR_n = 0 \rightarrow +V_S = iR_1 + iR_2 + \dots + iR_n$

$\rightarrow V_S = i(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \rightarrow i = \dfrac{V_S}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$

سپس محاسبه می کنیم که مقاومتها با چه مقاومتی جایگذاری شود به گونه ای که جریان گذرا از مدار همچنان i باقی بماند. اگر منبع ولتاژ V_S را به هر مقاومتی متصل کنیم جریانی که از آن می گذرد از قانون اهم پیروی می کند. یعنی رابطه زیر:

$$i = V_S/R$$

و ما می خواهیم کلیه مقاومتهای شکل ۱۵ را با مقاومتی جایگزین کنیم به گونه ای که جریان مدار تغییری نکند. پس رابطه فوق را با رابطه قبلی برابر هم قرار می دهیم تا ببینیم مقدار R چقدر باید باشد:

$$i = \frac{V_S}{R}; i = \frac{V_S}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}; \Rightarrow \frac{V_S}{R} = \frac{V_S}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} \Rightarrow R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

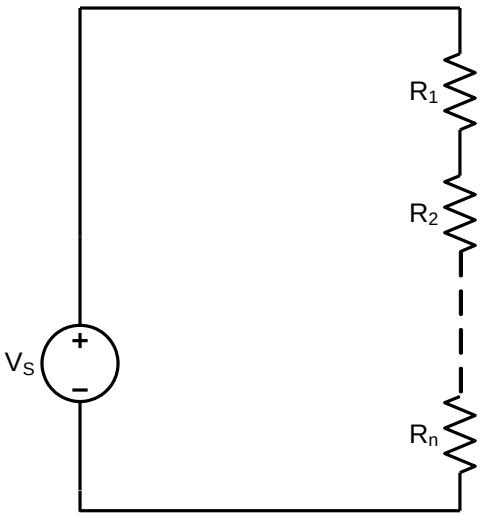
مقاومت معادل چندین مقاومت سری:
هنگامی که چندین مقاومت با هم سری هستند مقاومت معادل آنها برابر است با:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

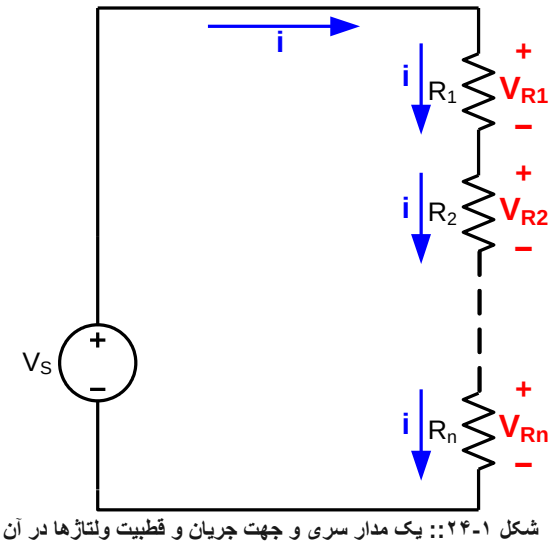
به عبارت دیگر، اگر از داخل مداری چندین مقاومت سری را برداریم و به جایشان مقاومتی بگذاریم، که مقدارش برابر با مقاومت حاصل جمع همه آنهاست، در مدار تغییری رخ نمی دهد.

کاربرد مدارهای سری: تقسیم ولتاژ

همان طور که در شکل ۱-۲۳ می بینید، تعدادی مقاومت را با هم سری کرده ایم. می خواهیم ببینیم که ولتاژ دو سر هر یک از مقاومتها چقدر است.



شکل ۱-۲۳: یک مدار سری



شکل ۱-۲۴:: یک مدار سری و جهت جریان و قطبیت ولتاژها در آن

مطابق شکل ۱-۲۴، جهت جریان گذرا از مقاومتها را علامت می زنیم و قطبیت ولتاژ دو سر مقاومتها را مشخص می کنیم. با توجه به اینکه این مقاومتها سری هستند، پس جریان گذرا از آنها با هم برابر است که جریان گذرا از آنها، همان طوری که در صفحه قبل حساب کردیم برابر است با:

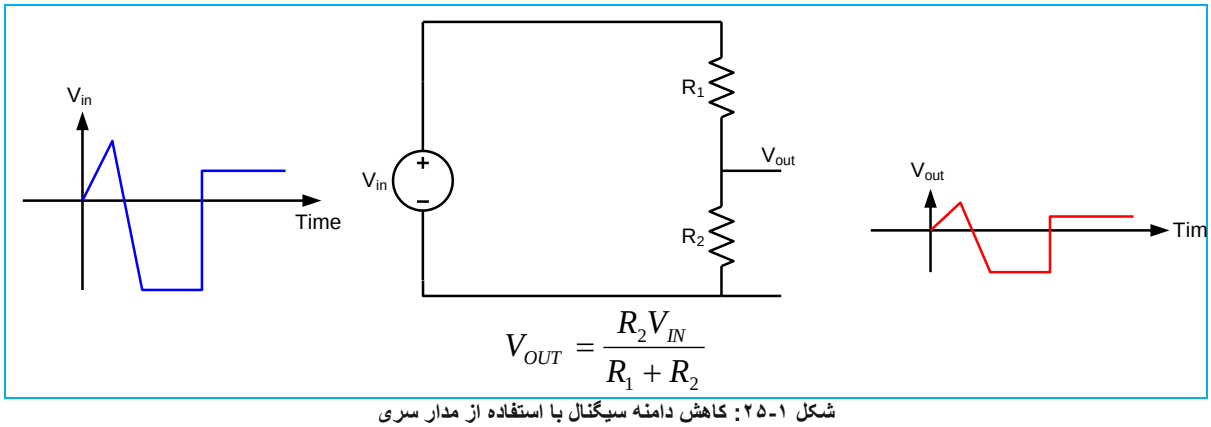
$$i = \frac{V_S}{R_1 + R_2 + ... + R_n}$$

مقدار ولتاژی که روی هر یک از مقاومتها می افتد برابر است با جریان گذرا از آنها ضربدر مقاومت آنها:

$$V_{R1} = iR_1 = \frac{V_S R_1}{R_1 + R_2 + ... + R_n} \; ; \; V_{R2} = iR_2 = \frac{V_S R_2}{R_1 + R_2 + ... + R_n} \; ; \; V_{Rn} = iR_n = \frac{V_S R_n}{R_1 + R_2 + ... + R_n}$$

به عبارت دیگر، هنگامی که چند مقاومت با هم سری باشند، ولتاژ به نسبت مقاومتهایشان بینشان تقسیم می شود.

بنابراین در مواردی که می خواهیم دامنه سیگنالی را کم کنیم می توانیم از مدارهای سری استفاده کنیم. (شکل ۱-۲۵)



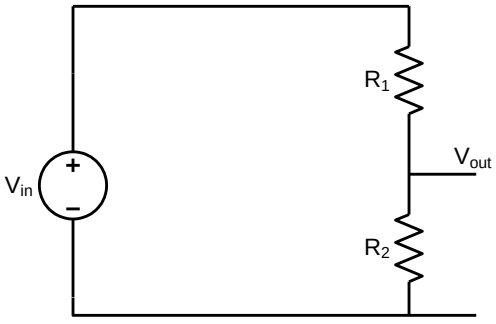
$$V_{OUT} = \frac{R_2 V_{IN}}{R_1 + R_2}$$

شکل ۱-۲۵: کاهش دامنه سیگنال با استفاده از مدار سری

مثال ۱-۵: مثالی کاربردی

خروجی بسیاری از سنسورهایی که در اتومبیل استفاده می‌شوند ۱۲ ولت است. فرض کنید که می‌خواهیم مداری طراحی کنیم که ولتاژ ۱۲ ولت را به ۵ ولت تبدیل کند. با استفاده از دو مقاومت، این مدار را طراحی کنید.

حل: کافی است که دو تا مقاومت را سری کنیم. با توجه به اینکه ولتاژ ورودی ۱۲ ولت است و می خواهیم ولتاژ خروجی ۵ ولت باشد، از رابطه داریم:



$$V_{OUT} = \frac{R_2 V_{IN}}{R_1 + R_2} \Rightarrow 5 = \frac{R_2 \times 12}{R_1 + R_2} \Rightarrow 5R_1 + 5R_2 = 12R_2$$

$$\Rightarrow 5R_1 = 7R_2$$

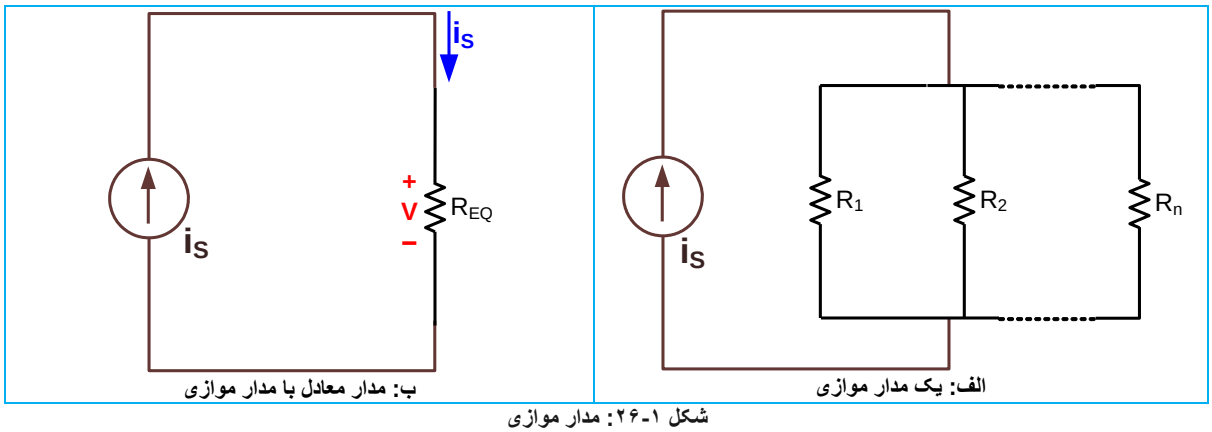
پس با دو مقاومت که نسبت آنها ۵ به ۷ باشد می توانیم، ولتاژ ۱۲ ولت را به ۵ ولت تبدیل کنیم. مثلا می توانیم برای R1 از مقاومت 5K و برای R2 از مقاومت 7K استفاده کنیم.

مدارهای موازی

هنگامی که هر دو سر عناصری به گره های همسانی متصل باشند می گوییم که آنها با هم موازی هستند.

مقاومت معادل در مدارهای موازی

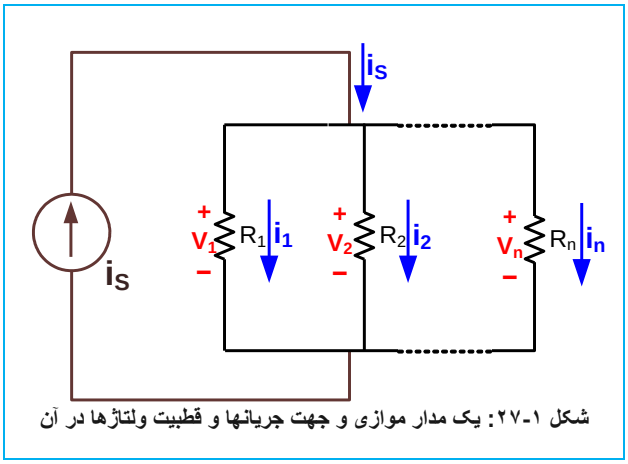
همان طور که در شکل ۱-۲۶-الف می بینید، تعدادی مقاومت را با هم موازی کرده ایم. این مقاومتها را می‌خواهیم با یک مقاومت جایگزین کنیم به گونه ای که جریان و ولتاژ مدار تغییری نکند. (شکل ۱-۲۶-ب)



الف: یک مدار موازی

ب: مدار معادل با مدار موازی

شکل ۱-۲۶: مدار موازی



شکل ۱-۲۷: یک مدار موازی و جهت جریانها و قطبیت ولتاژها در آن

حساب می کنیم که هم اکنون ولتاژ دو سر مقاومتها چقدر است تا مدار معادل نیز همان ولتاژ را در دو سر مقاومت خود داشته باشد. برای به دست آوردن ولتاژ دو سر مقاومتها، جهت جریانهای گذرا از مقاومتها را علامتگذاری می کنیم و قطبیت ولتاژ دو سر مقاومتها را علامت می‌زنیم. (شکل ۱-۲۷)

طبق قاعده KCL داریم:

$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = i_S$

از طرفی می دانیم که ولتاژ دو سر هر یک از مقاومتها برابر است با حاصل ضرب جریان مقاومتها در مقدار مقاومتها:

$V_{R1} = i_1 R_1 \rightarrow i_1 = V_{R1}/R_1$

$V_{R2} = i_2 R_2 \rightarrow i_2 = V_{R2}/R_2$

$V_{Rn} = i_n R_n \rightarrow i_n = V_{Rn}/R_n$

که با جایگذاری کردن مقادیر i_1 و i_2 و i_n داریم:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = i_S \rightarrow \frac{V_{R1}}{R_1} + \frac{V_{R2}}{R_2} + \ldots + \frac{V_{Rn}}{R_n} = i_S$$

با توجه به اینکه همه این مقاومتها با هم موازی هستند (دو سر همه این مقاومتها به دو نقطه یکسان متصل است) پس ولتاژ دو سر همه این مقاومتها با هم برابر است:

$V_1 = V_2 = \ldots = V_n$

از طرفی می خواهیم ولتاژ دو سر مقاومت معادل (V) با ولتاژ دو سر مقاومتها (V_1 و V_2 و V_n) همسان باشد. (شکل ۲۶-۱-الف و ۱-۲۶-ب) پس:

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V$$

بنابراین:

$$\frac{V_{R1}}{R_1} + \frac{V_{R2}}{R_2} + \ldots + \frac{V_{Rn}}{R_n} = i_S \;\; ; \;\; V_1 = V_2 = \ldots = V_n = V \;\; \rightarrow \;\; \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{V}{R_n} = i_S$$

از طرفی برحسب شکل مدار معال (۱-۲۶-ب) داریم:

$$\frac{V}{R_{EQ}} = i_S$$

با برابر قرار دادن دو رابطه آخر داریم:

$$\frac{V}{R_{EQ}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{V}{R_n} \Rightarrow \frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

مقاومت معادل چندین مقاومت موازی:
هنگامی که چندین مقاومت با هم موازی هستند مقاومت معادل آنها برابر است با:

$$\frac{1}{R_{EQ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

تجسم فیزیکی مدارهای موازی:
تصور کنید که ۵ تا لوله با سطح مقطع همسان را در موازات هم قرار داده ایم که آب را از داخل منبعی به منبع دیگری می برند. این لوله ها همانند لوله ای عمل می کنند که سطح مقطع آن برابر مجموع جمیع لوله ها باشد. مثلا اگر سطح مقطع هر یک از لوله ها ۱ سانتیمتر باشد، کل لوله ها در حکم لوله ای با سطح مقطع ۵ سانتیمتر عمل میکنند. همچنین جریان آب به نسبت مساوی بین لوله ها تقسیم میشود. مثلا اگر در مجموع، ۵ لیتر در دقیقه از لوله ها عبور میکند، از هر یک از لوله ها به اندازه ۱ لیتر در دقیقه آب میگذرد.
حال اگر دو تا از لوله ها را حذف کنیم و به جای آن لوله ای با سطح مقطع مجموع آن دو، قرار دهیم، کل جریان آب جابجا شونده تغییری نمیکند. همچنین جریانی که از لوله با سطح مقطع دو برابر می گذرد، ۲ برابر جریانی است که از سایر لوله ها می گذرد. یعنی هر چه سطح مقطع بزرگتر باشد آب بیشتری از آن لوله می گذرد.
در مقاومتها کمیتی وجود دارد به نام رسانایی که با حرف G نمایش داده میشود و برابر با معکوس مقاومت است. یعنی
$G = \frac{1}{R}$
رسانایی همانند سطح مقطع لوله می ماند. در لوله هر چه سطح مقطع بزرگتر باشد آب راحت تر از آن میگذرد. در مقاومت نیز همین طور است. هر چه مقاومت کمتر باشد، رسانایی بیشتر است و جریان بیشتری از آن می گذرد. همچنین اگر چندین مقاومت با هم موازی شوند، از مقاومتی که رسانایی بیشتری دارد جریان بیشتری در مقایسه با بقیه مقاومتها می گذرد و همچنین همانطوری که لوله های موازی در حکم لوله ای با سطح مقطع مجموع لوله ها عمل می کنند، رسانایی معادل مقاومتهای موازی نیز برابر حاصل جمع رسانایی مقاومتها است:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

که این معادله، با معادله ای که در فوق برای مقاومت معادل چندین مقاومت موازی دیدیم، همسان است.

بخش ۱-۴: تبادل انرژی در مدار

رفتار منبع ولتاژ و مقاومت را به طور تمثیلی می توان مانند پمپ آب و توربینی در نظر گرفت. منبع ولتاژ همانند پمپ آبی، قطرات آب را به سطح بالاتری می برد و این قطرات هنگامی که بر توربین بریزد، به سطحی با پتانسیل کمتر می رسد و در عین حال توربین را به چرخش در می آورد که چرخش توربین می تواند برایمان سنگ آسیابی را بچرخاند. بر طبق اصل

بقای انرژی، انرژی تولید شده توسط منابع انرژی، برابر با کل انرژی مصرف شده در مدار است. مقدار انرژی مصرف شده یا تولید شده در هر عنصر مدار را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$W = VIt = RI^2 t$$

در رابطه فوق واحد انرژی ژول می باشد که با علامت J نمایش داده می شود.

توان و ارتباط آن با انرژی

به مقدار انرژی که در واحد زمان، در عنصری مصرف یا تولید می شود، توان می گوییم که با P نمایش می دهیم و روابط زیر برای آن وجود دارد:

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$$

در الکترونیک، توان را معمولا بر حسب وات بیان می کنند که علامت آن W است.

مثال ۱-۶

در یک لامپ ۲۲۰ ولت با توان ۱۰۰ وات حساب کنید که مقاومت آن چقدر است.

حل:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 100 = \frac{220^2}{R} \Rightarrow R = \frac{48400}{100} = 484\Omega$$

مثال ۱-۷

یک سیستم کامپیوتری داریم که در هر دقیقه به مدت ۱۰ ثانیه به سیستم سرور متصل می شود. این سیستم زمانی که در حال تبادل اطلاعات با سرور است ۱۰۰ میلی آمپر و در سایر حالات ۴۰ میلی آمپر جریان می کشد. با فرض اینکه این سیستم با ولتاژ ۵ ولت کار می کند موارد زیر را حساب کنید:

الف) توان مصرفی این دستگاه زمانی که به سرور متصل است.

ب) توان مصرفی این دستگاه، هنگامی که به سرور متصل نمی‌باشد.

ج) مقدار انرژی مصرفی این دستگاه، در مدت یک دقیقه

د) توان متوسط مصرفی این دستگاه

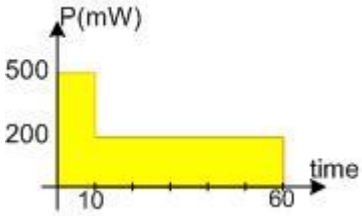
حل:

الف)

$$P = VI = 5 \times 100mA = 500mW = 0.5W$$

ب)

$$P = VI = 5 \times 40mA = 200mW = 0.2W$$



ج) این دستگاه ۱۰ ثانیه به سرور متصل است و ۵۰ ثانیه قطع است بنابراین انرژی مصرفی آن در یک دقیقه برابر است با:

$$W = 0.5 \times 10 + 0.2 \times 50 = 5 + 10 = 15$$

د) از تقسیم انرژی مصرفی بر بازه زمانی، متوسط توان مصرفی را به دست می آوریم:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{15}{60} = 0.25\text{W}$$

بخش ۱-۵: منابع وابسته

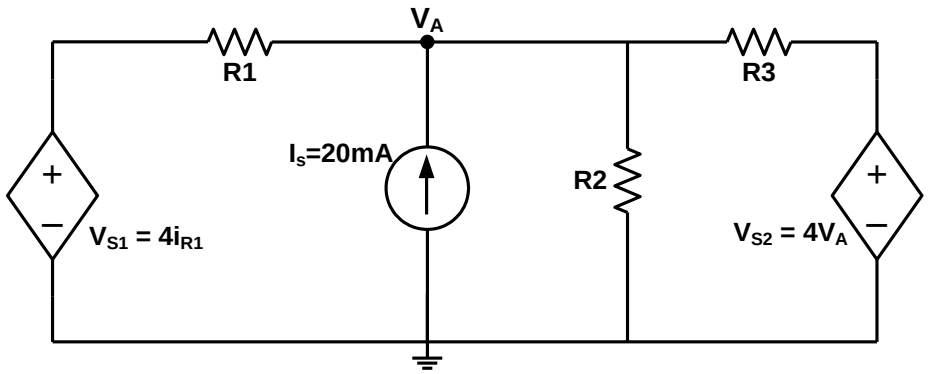
در الکترونیک عناصری وجود دارند که همانند منابع ولتاژ و منابع جریان عمل می کنند، با این تفاوت که ولتاژ یا جریان تولید شده توسط آنها وابسته به ولتاژ یا جریان نقطه دیگری از مدار است. به عبارتی دیگر، رابطه ای را بین ولتاژ یا جریان خروجی خود، و ولتاژ یا جریان نقطه ای دیگر از مدار برقرار می کنند که در زیر با این عناصر آشنا می شویم.

منابع ولتاژ وابسته

منابع ولتاژ وابسته، منابع ولتاژی هستند که مقدار ولتاژ تولید شده توسط آنها وابسته به جریان یا ولتاژ نقطه دیگری از مدار باشد. در مواردی که ولتاژ تولید شده توسط منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ نقطه دیگری از مدار باشد به آن منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ یا به قولی Voltage-Controlled Voltage Source (VCVS) می گوییم و در مواردی که ولتاژ تولید شده توسط منبع ولتاژ، وابسته به جریان قسمتی از مدار باشد آن را منبع ولتاژ وابسته به جریان Current-Controlled Voltage Source (CCVS) می‌گوییم.

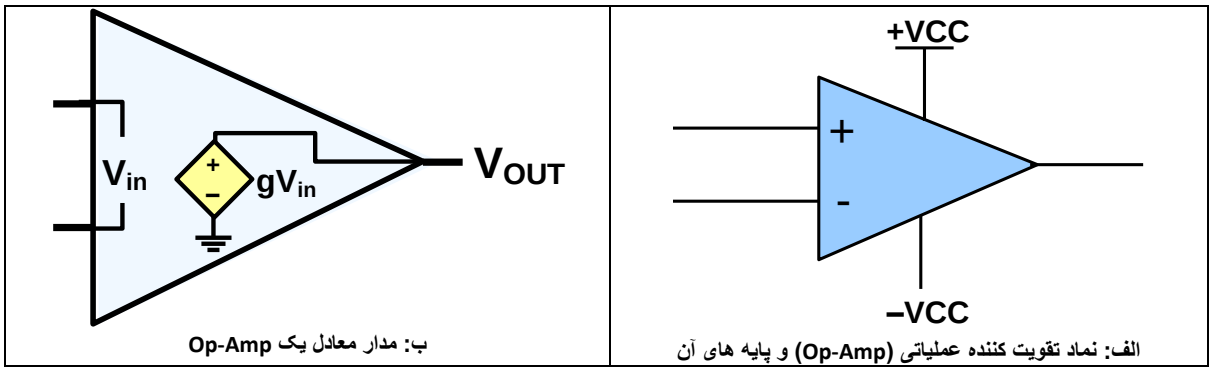
شکل ۱-۲۸: منبع ولتاژ وابسته

در شکل روبرو، نماد منابع ولتاژ وابسته، نمایش داده شده است. همان طوری که می بینید نماد منابع ولتاژ وابسته، شبیه منابع ولتاژ مستقل است. با این تفاوت که منابع ولتاژ وابسته با لوزی نمایش داده میشوند. در حالی که منابع ولتاژ مستقل (همان طوری که در بخش ۱-۲ دیدیم) با دایره نمایش داده می شود. در شکل زیر، منبع وابسته سمت چپ مدار، CCVS و منبع ولتاژ وابسته سمت راست مدار VCVS هست.



شکل ۱-۲۹: مداری نمونه که در آن دو تا منبع ولتاژ وابسته به نامهای VS1 و VS2 وجود دارد که به ترتیب CCVS و VCVS هستند.

از جمله منابع ولتاژ وابسته VCVS، می توان به تقویت کننده های عملیاتی (Op-Amp) اشاره کرد که در شکل ۱-۳۰ نمایش داده شده و در فصلهای آینده با آنها آشنا خواهید شد.



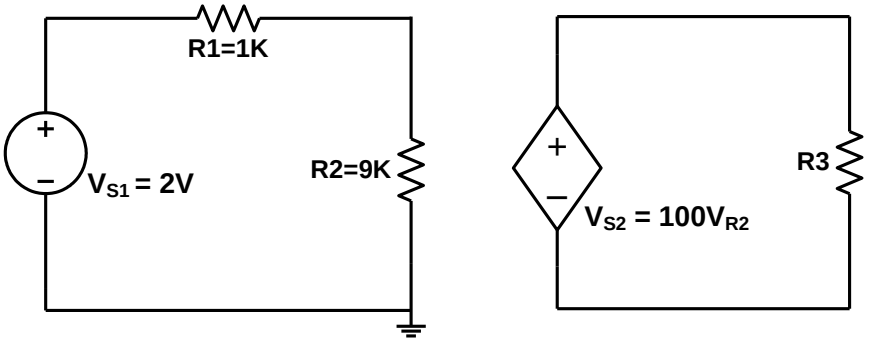
الف: نماد تقویت کننده عملیاتی (Op-Amp) و پایه های آن

ب: مدار معادل یک Op-Amp

شکل ۱-۳۰: تقویت کننده عملیاتی (Op-Amp)

مثال ۱-۸

در مدار زیر ولتاژ دو سر R_3 را محاسبه کنید.



حل:

$$V_{R3} = V_{S2}$$

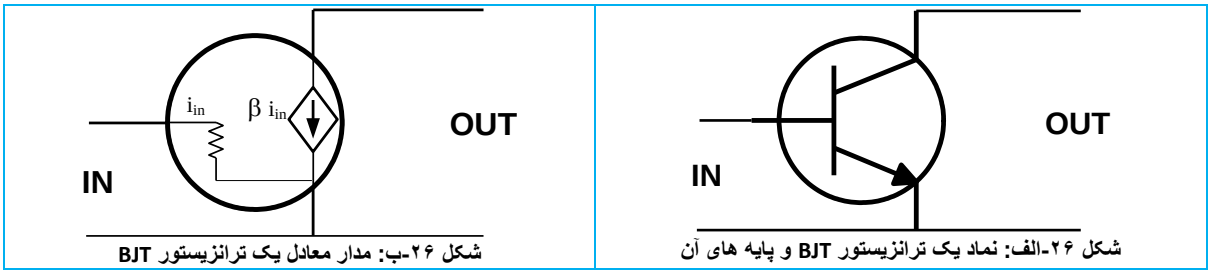
$$\left.\begin{aligned} V_{S2} &= 100V_{R2} \\ V_{R2} &= \frac{V_{S1}\times R_1}{R_1+R_2} = \frac{2\times 1K}{1K+9K} = \frac{2\times 1K}{10K} = 0.2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{S2} = 100\times 0.2 = 20 \Rightarrow V_{R3} = 20$$

منابع جریان وابسته

منابع جریان وابسته، منابع جریانی هستند که مقدار جریان تولید شده توسط آنها وابسته به جریان یا ولتاژ نقطه دیگری از مدار باشد. نماد منابع جریان وابسته، همان طوری که در شکل زیر نمایش داده شده است، مشابه نماد منابع جریان مستقل است با این تفاوت که به جای دایره، لوزی در دور آن ترسیم شده است. بنابراین برای نمایش منابع وابسته (جریان و ولتاژ) از علامت لوزی و برای نمایش منابع مستقل از علامت دایره استفاده می کنیم.

شکل ۱-۳۱: منبع جریان وابسته

از جمله منابع جریان وابسته، ترانزیستورهای BJT هستند که جریان گذرا از آنها، وابسته به جریان گذرا از قسمتی از مدار است. بنابراین ترانزیستورهای BJT، منابع جریان وابسته به جریان یا به قولی Current-Controlled Current Source (CCCS) هستند. در شکل ۱-۳۱ نماد ترانزیستور BJT و مدار معادل آن ترسیم شده است.



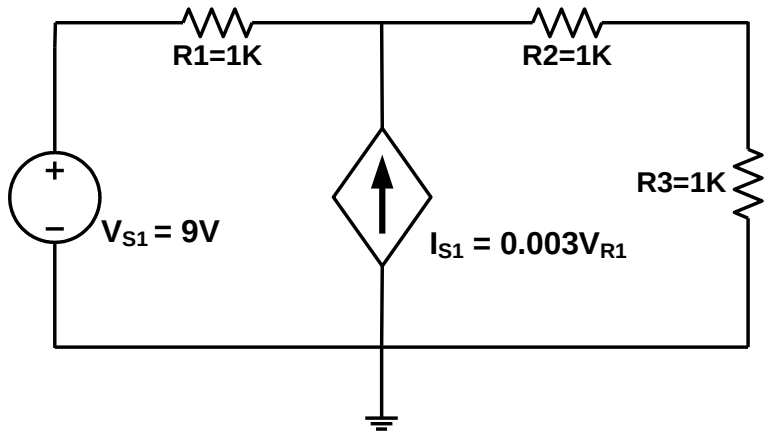
شکل ۲۶-الف: نماد یک ترانزیستور BJT و پایه های آن

شکل ۲۶-ب: مدار معادل یک ترانزیستور BJT

شکل ۱- ۳۲: ترانزیستور BJT

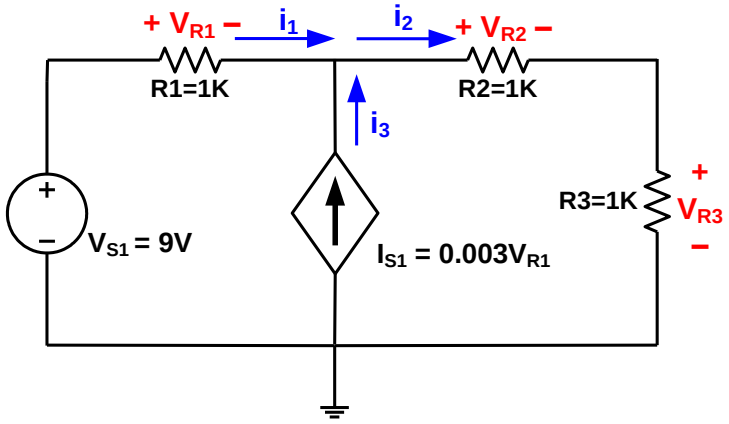
مثال ۱-۹

در مدار زیر جریان گذرا از R_3 را محاسبه کنید.



حل: طبق روش بنیادی اقدام به حل این مساله می کنیم. ابتدا جریان شاخه ها را علامتگذاری می کنیم و از روی آن، قطبیت ولتاژ دو سر مقاومتها را مشخص می کنیم. (شکل زیر)

سپس معادلاتی که برای جریان و ولتاژ اجرای مدار داریم را می نویسیم:



$$V_{R1} = i_1 R_1$$
$$V_{R2} = i_2 R_2$$
$$V_{R3} = i_2 R_3$$
$$I_{S1} = 0.003V_{R1} = 0.003 i_1 R_1 = i_3$$
$$\Rightarrow i_3 = 0.003 i_1 R_1$$

حال معادلات KVL و KCL را برای مدار می نویسیم. برای گره بالای منبع وابسته داریم:

$$i_1 + i_3 - i_2 = 0 \Rightarrow i_1 + 0.003 i_1 R_1 - i_2 = 0 \Rightarrow i_1 + 3i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow 4i_1 = i_2$$

معادله KVL برای حلقه بیرونی مدار به قرار زیر است:

$$V_{S1} - V_{R1} - V_{R2} - V_{R3} = 0 \Rightarrow 9 - i_1 R_1 - i_2 R_2 - i_2 R_3 = 0 \Rightarrow 9 - 1000 i_1 - 1000 i_2 - 1000 i_2 = 0$$
$$\Rightarrow 9 = 1000 i_1 + 2000 i_2$$

با جای گذاری کردن $4i_1 = i_2$ در معادله فوق داریم:

$$9 = 1000 i_1 + 2000 \times 4 i_1 \Rightarrow 9 = 9000 i_1 \Rightarrow i_1 = 9mA \Rightarrow i_2 = 4 \times 9mA = 36mA$$

کاربردهای منابع وابسته

از جمله کاربردهای منابع وابسته، تقویت کردن سیگنال است. به طور مثال در دستگاه های ضبط صوت، امواج ضعیفی که از طریق رادیو و یا سی دی به وجود می آید، توسط تقویت کننده، تقویت می شود تا امواج قوی تری حاصل شود و بلندگو را به صدا درآورد.

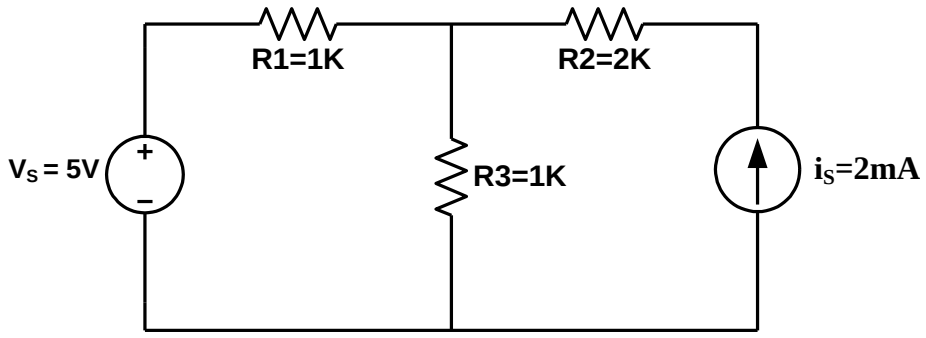
در ربات ها و سیستمهای کنترل مختلفی که طراحی می کنیم نیز سیگنالهای ضعیفی که از سنسورها دریافت می شوند را می بایست تقویت کنیم تا بتوانیم بعدا آن را به سیگنالی دیجیتال تبدیل کنیم و توسط CPU (یا MPU) پردازش شوند و تصمیم گیری شود.

بخش ۱-۶: تحلیل چندین مدار به روش بنیادی

در این بخش به منظور ممارست بیشتر با مفاهیم این فصل، چندین مدار تحلیل شده اند که ذیلا به آنها می‌پردازیم.

مثال ۱-۱۰

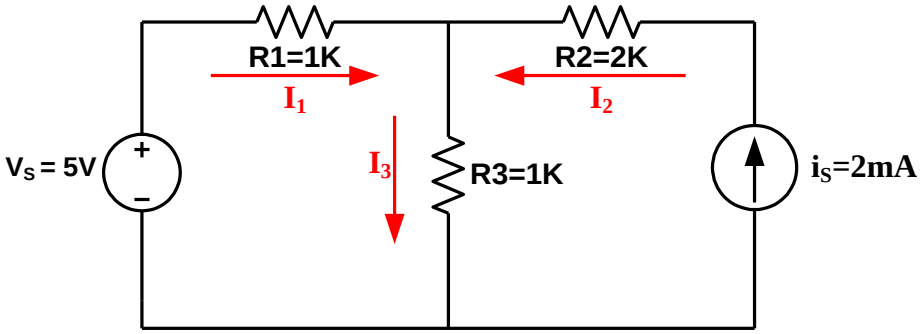
در مدار زیر، جریان گذرا از R3 را حساب کنید.



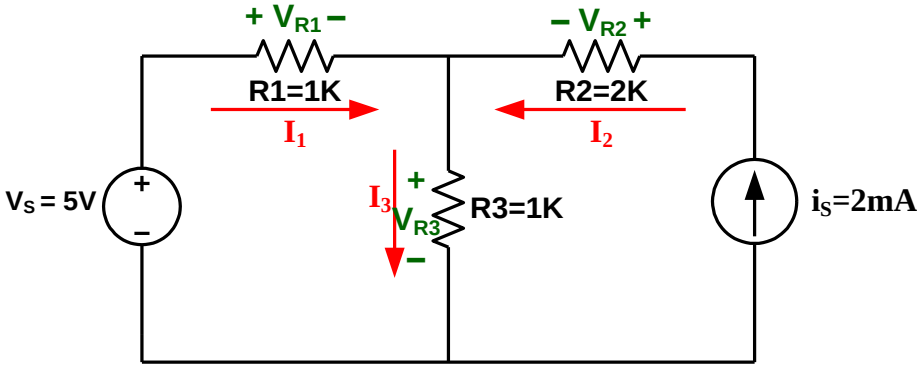
حل:

برای حل این مساله از روش بنیادی به صورت زیر عمل می کنیم:

۱) جریانهای شاخه های مختلف را نامگذاری می کنیم



۲) قطبیت ولتاژ های مقاومتها را بر حسب جریانها مشخص می کنیم.



۳) روابط موجود برای جریانها و ولتاژها را می نویسیم

$V_{R1} = I_1R_1$; $V_{R2} = I_2R_2$; $V_{R3} = I_3R_3$

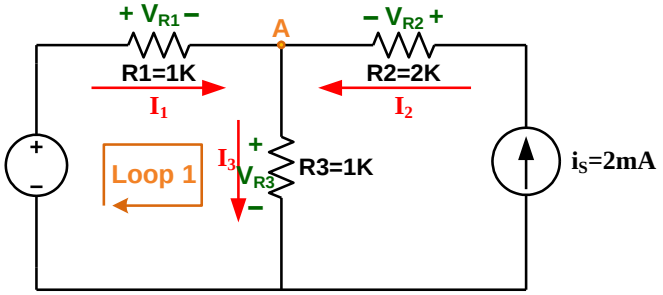
۴) قوانین کیرشهوف را برای مدار می نویسیم:

در گره A داریم:

$I_1 + I_2 = I_3$

برای حلقه ۱ داریم:

$5 - V_{R1} - V_{R3} = 0$



با توجه به اینکه جریان منبع جریان 2mA است و از آنجایی که منبع جریان و مقاومت R2 با هم سری هستند پس جریان گذرا از مقاومت R2 و جریان گذرا از منبع جریان با هم برابرند. پس

$I_2 = I_S = 2mA$

۵) حال به حل معادلات موجود می پردازیم:

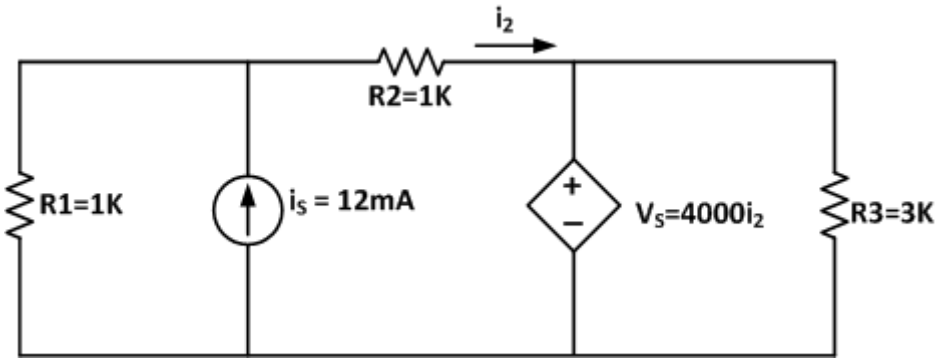
$I_2 = 2mA$ and $I_1 + I_2 = I_3$ ➔ $I_1 + 2mA = I_3$

$5 - V_{R1} - V_{R3} = 0$ ➔ $5 - I_1R_1 - I_3R_3 = 0$ ➔ $5 - I_1R_1 - (I_1+2mA)R_3 = 0$ ➔ $5 - 1000I_1 - 1000I_1 - 2 = 0$

➔ $3 = 2000I_1$ ➔ $I_1 = 1.5\ mA$ ➔ $I_3 = 1.5mA + 2mA = 3.5mA$

مثال ۱-۱۱

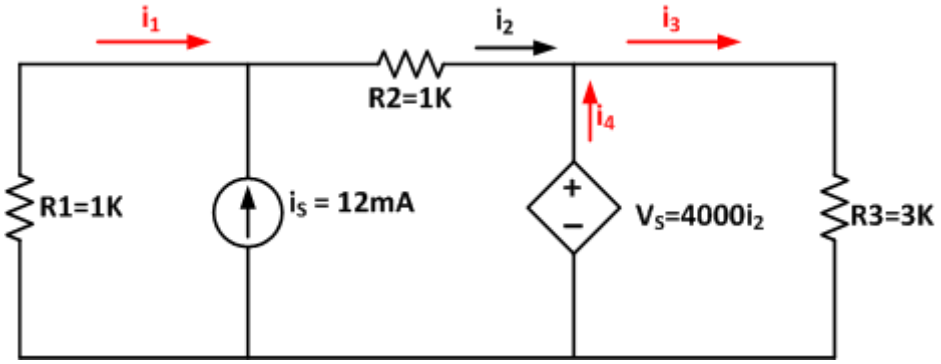
سوال: در شکل زیر ولتاژ دو سر مقاومت R3 را حساب کنید



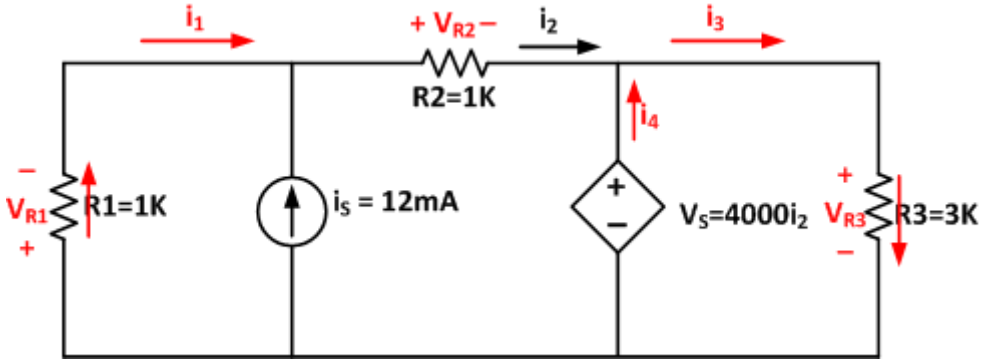
پاسخ:

اگر بخواهیم مداری را با استفاده از روش بنیادی (قوانین کیرشهف) تحلیل کنیم، گامهای زیر را می بایست طی کنیم:

۱. ابتدا جریان شاخه ها را نامگذاری می کنیم و جهت جریانها را به هر جهتی که مایلیم می‌کشیم.



۲. از روی جریان شاخه ها، ولتاژ های دو سر مقاومتها را علامتگذاری می‌کنیم. ولتاژ ها را طوری علامتگذاری می‌کنیم که جریان از سر مثبت مقاومت، به سر منفی برود.



۳. روابطی که برای ولتاژ و جریان هر یک از عناصر داریم می‌نویسیم.

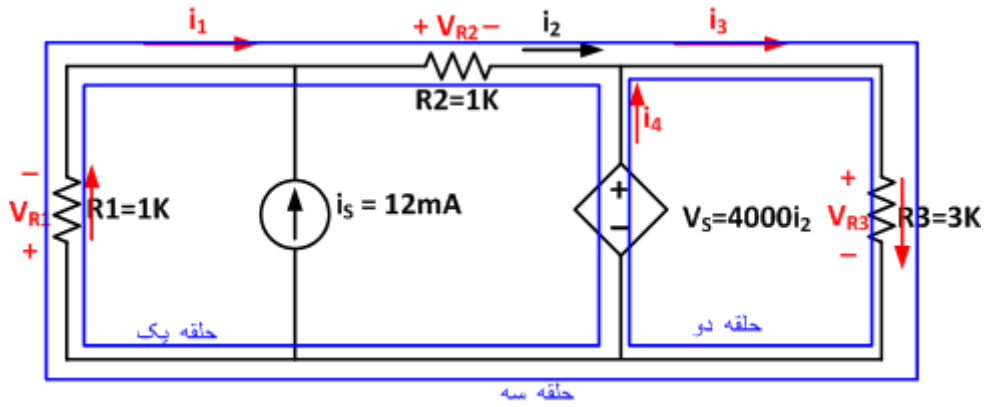
$V_{R1} = i_1R_1$; $V_{R13} = i_3R_3$; $V_{R4}=i_3R_4$

۴. قوانین جریان و ولتاژ کیرشهف را برای مدار می‌نویسیم.

$i_1 + i_s - i_2 = 0 \rightarrow i_1 + 12m = i_2$

$i_2 + i_4 - i_3 = 0$

قوانین KVL را در حلقه هایی میتوانیم بنویسیم که در آنها منبع جریانی وجود نداشته باشند. زیرا اختلاف پتانسیل دو سر منابع جریان برای ما مجهول است. بنابراین ما در این شکل، برای حلقه های زیر میتوانیم معادله بنویسیم:



در حلقه یک داریم:

$$-V_{R1} - V_{R2} - V_S = 0 \rightarrow V_{R1} + V_{R2} + V_S = 0 \rightarrow i_1R_1 + i_2R_2 + 4000i_2 = 0$$

در حلقه دو داریم:

$$V_S - V_{R3} = 0 \rightarrow i_1R_1 - i_3R_3 - V_S = 0$$

۵. حال معادلاتی که نوشته ایم را حل میکنیم تا جریان و ولتاژ عناصر بدست آید. میدانیم که $i_1 + 12m = i_2$ *که با جایگذاری آن در معادله حلقه یک داریم:*

$$i_1 + 12m = i_2 \rightarrow i_1 = i_2 - 12m$$

$$i_1R_1 + i_2R_2 + 4000i_2 = 0 \rightarrow (i_2 - 12m)R_1 + i_2R_2 + 4000i_2 = 0$$

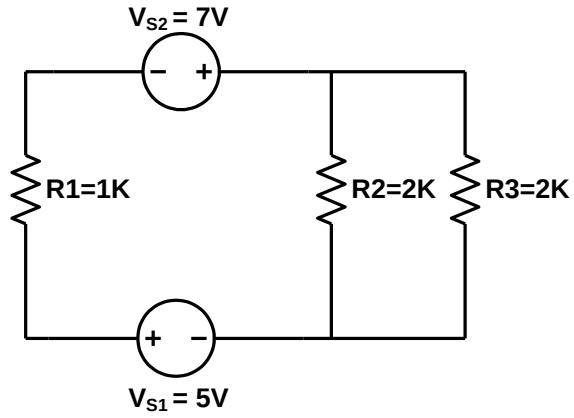
$$\rightarrow 1000(i_2 - 12m) + 1000i_2 + 4000i_2 = 0 \rightarrow 6000\, i_2 = 12 \rightarrow i_2 = 2mA$$

ولتاژ دو سر مقاومت R_3 *برابر* V_S *است بنابراین داریم:*

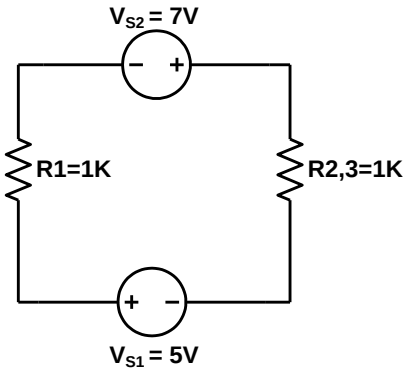
$$V_{R3} = V_S = 4000i_2 = 4000 \times 2mA = 8V$$

مثال ۱-۱۲

در مدار زیر، جریان گذرا از R1 چقدر است؟



پاسخ:

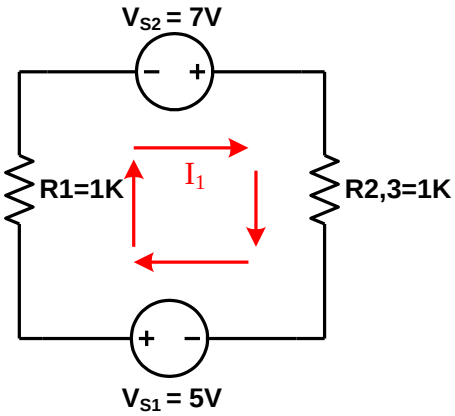


با توجه به اینکه R2 و R3 با هم موازی هستند بنابراین می توانیم آنها را با هم ساده کنیم:

$$R_{2,3} = \frac{R2 \times R3}{R2 + R3} = \frac{2K \times 2K}{2K + 2K} = \frac{4M}{4K} = 1K$$

حال مدار ساده شده را به روش بنیادی تحلیل می کنیم:

۱. ابتدا جریانهای گذرا در مدار را مشخص می کنیم. با توجه به اینکه کل مدار، فقط یک حلقه است و هیچ گونه انشعابی در مدار وجود ندارد، یک جریان از کل مدار می گذرد و جریان کل مدار یکسان است. به عبارت دیگر، در هر گره، جریان وارد شده به گره و جریان خارج شونده با هم برابرند.



۲. سپس قطبیت ولتاژ های مقاومتها را بر حسب جریان گذرا از آنها مشخص می کنیم.

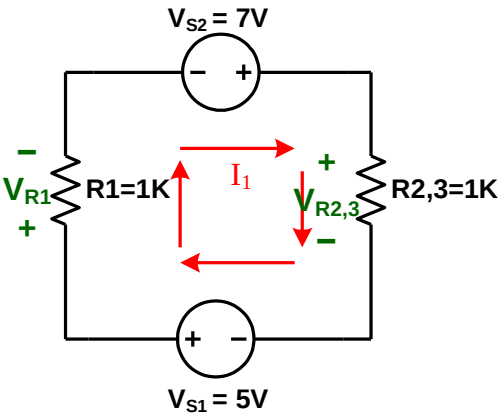
۳. روابطی که برای ولتاژها و جریانهای مدار داریم را می نویسیم:

$$V_{R1} = I_1 R_1 \;\; ; \;\; V_{R2,3} = I_1 R_{2,3}$$

۴. قوانین کیرشهوف را برای مدار می نویسیم.

$$-V_{R1} + V_{S2} - V_{R2,3} + V_{S1} = 0$$

۵. در انتها، معادلات به دست آمده را حل می کنیم تا جواب مساله به دست آید.



$$-V_{R1} + V_{S2} - V_{R2,3} + V_{S1} = 0 \rightarrow -I_1R_1 + 7 - I_1R_{2,3} + 5 = 0$$

$$\rightarrow -1000I_1 + 7 - 1000I_1 + 5 = 0 \rightarrow 12 = 2000I_1$$

$$\rightarrow I_1 = 12 / 2000 = 6 \text{ mA}$$

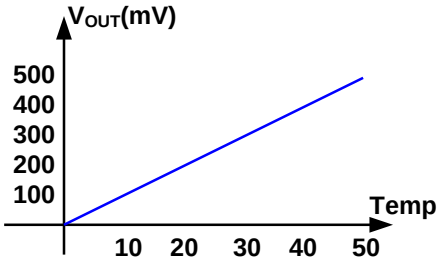
$I_{R1} = I_1 = 6$ mA

بخش ۱-۷: آشنایی با سنسورها و مبدل آنالوگ به دیجیتال (اختیاری)

سنسورها

ما دنیای اطراف خودمان را با حواس پنج گانه حس می کنیم. مغز ما قابلیت پردازش سیگنالهای عصبی را دارد و مستقیما نمی‌تواند، رنگ، صدا، بو و غیره را پردازش کند. بنابراین هنگامی که ما صدایی را می شنویم گوش، موج صدا را تبدیل به سیگنال عصبی می کند تا مغز بتواند در مورد آن تصمیم بگیرد. در

دنیای الکترونیک و کامپیوتر مدارها قادرند که سیگنالهای الکتریکی که به شکل ولتاژ، جریان، مقاومت، خاصیت سلفی و خازنی و غیره هستند را مورد پردازش و تحلیل قرار دهند. سنسورها، برای ما کار تبدیل سیگنالهای محیط اطراف از قبیل دما، رطوبت و غیره را به سیگنالهای الکتریکی انجام می دهند.

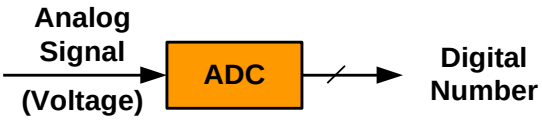


مثلا اگر ما بخواهیم ربات امدادگری بسازیم که وجود آتش در محیط کمک رسانی خود را تشخیص دهد لازم است که یک سنسور دما داشته باشد که با استفاده از آن دمای اطراف خود را حس کند. از جمله سنسورهای دما LM35 است که دما را به ولتاژ تبدیل می کند. در صفر درجه خروجی این سنسور ۰ ولت است و به ازای هر درجه افزایش دما ولتاژ خروجی آن نیز ۱۰ میلی ولت افزایش می یابد.(شکل روبرو) بنابراین رابطه بین دمای محیط، با خروجی آن به صورت زیر است:

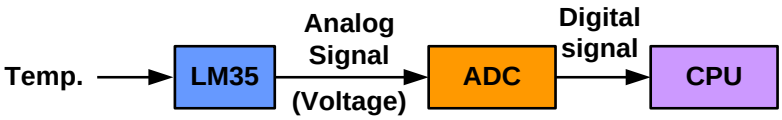
$$V = T \times 10mV$$

مثلا اگر دمای اطراف این سنسور به ۱۰۰ درجه سانتیگراد برسد، ولتاژ خروجی آن ۱۰۰۰ میلی ولت می شود.

مبدل آنالوگ به دیجیتال (ADC)



به طور معمول برای پیاده سازی مغز ربات و سیستمهای کنترلی از میکروکنترلرها (آی سی هایی در ابعاد سکه ۲ ریالی که در داخل خود کلیه اجزای کامپیوتر از قبیل CPU، حافظه و غیره را جا داده اند.) استفاده می کنیم. در دنیای دیجیتال سیگنالها به صورت ۰ و ۱ هستند اما همانطوری که در مثال LM35 دیدیم سیگنال خروجی آن به صورت ولتاژی است که مقدار آن به تناسب دما، تغییر می کند. مبدل آنالوگ به دیجیتال (ADC)، قادر است که ولتاژی را در ورودی دریافت کند و آن را به صورت یک عدد باینری در خروجی خود بیان کند که رابطه ای خطی بین ولتاژ اعمال شده به آن و عدد باینری خروجی آن، وجود دارد. بنابراین می توانیم سیگنال خروجی LM35 را به ورودی یک ADC بدهیم تا از خروجی آن، عددی باینری دریافت کنیم و ربات ما از طریق آن دمای اطراف خود را حس نماید. (شکل روبرو)



سیگنال کاندیشنینگ (Signal Conditioning)

در مثال LM35، خروجی سنسور به صورت ولتاژ بود. اما در سایر سنسورها ممکن است که خروجی سنسور، به صورت ولتاژ، جریان، مقاومت، خاصیت سلفی، خاصیت خازنی و غیره باشد. اما همان طوری که دیدیم ADC فقط می‌تواند ولتاژ را به عدد باینری تبدیل کند. پس در مواردی که سیگنال خروجی سنسور ولتاژ نیست لازم است که ابتدا خروجی سنسور به ولتاژ تبدیل شود تا برای اندازه گیری توسط ADC آماده شود. به تبدیل کردن سیگنال از شکلی به شکلی دیگر (مثلا از ولتاژ به جریان و یا تقویت کردن و یا برش دادن آن) اصطلاحا Signal Conditioning می گویند که ما در این درس، طریقه طراحی مدارهای آنالوگ به منظور signal conditioning را فرا می گیریم و در درسهای معماری و میکروپروسسور به طور تخصصی به طراحی و ساخت کامپیوترهای دیجیتال می پردازیم و کامپیوترهایی با مقاصد خاص (Embedded systems) از قبیل رباتها، سیستمهای کنترل کننده و غیره را طراحی می کنیم.

فصل دوم: ولتاژ گره

بخش ۲-۱: تحلیل مدارها به روش ولتاژ گره

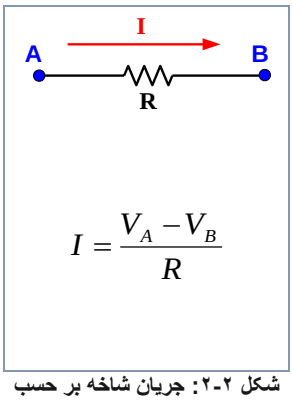
مقدمه ای بر روش ولتاژ گره

در فصل قبل تحلیل مدارها با استفاده از قوانین کیرشهوف را فرا گرفتید. قوانین کیرشهوف در جمیع مدارها وجود دارد، منتهی، اگر بخواهیم مدارها را با استفاده از قوانین کیرشهوف تحلیل کنیم هنگامی که تعداد شاخه های مدار زیاد شود، تعداد معادلات بسیار زیاد می شود و تحلیل کردن مدار وقتگیر می شود. بنابراین ما برای تحلیل مدارها معمولا از روشهای دیگری استفاده می کنیم که اگر چه بر قوانین کیرشهوف بنا شده اند اما تعداد معادلات کمتری را به وجود می آورند.

اگر بخواهیم مداری که n شاخه دارد را با استفاده از روش کیرشهوف تحلیل کنیم، لازم است که تقریبا n معادله برای جریان شاخه ها و n معادله برای ولتاژ شاخه ها بنویسیم. ما اگر بتوانیم به گونه ای جریان شاخه ها را از معادلات حذف کنیم و معادلات را بر حسب ولتاژ گره ها بنویسیم، تعداد مجهولات مدار تقریبا نصف می شود و حل کردن مدار خیلی ساده تر خواهد شد. اما چگونه می توانیم جریان ها را از معادلات حذف کنیم؟

هنگامی سر و کله جریان شاخه ها در معادلات پیدا می شود که بخواهیم معادله جریان (KCL) را برای گره ها بنویسیم.

در شکل ۲-۱، $I_1=I_2+I_3$. اما همانطور که در شکل ۲-۲، نشان داده شده است، از قانون اهم داریم که جریان گذرا از هر شاخه برابر است با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت. پس در شکل ۲-۱، نیز مقدار جریان شاخه ها به صورت زیر است:

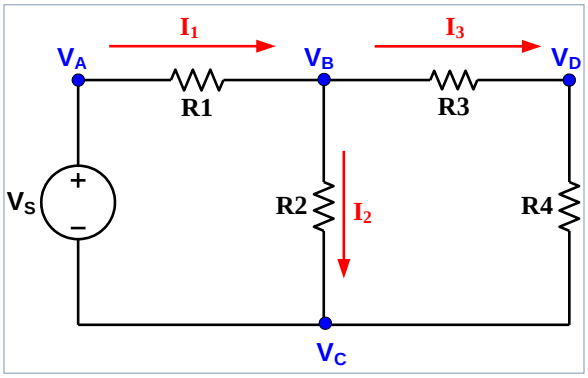


شکل ۲-۲: جریان شاخه بر حسب ولتاژ دو سر آن

$$I_1=\frac{V_A-V_B}{R_1}$$

$$I_2=\frac{V_B-V_C}{R_2}$$

$$I_3=\frac{V_B-V_D}{R_3}$$



شکل ۲-۱:یک مدار ساده

اگر مقادیر جریانها را در معادله KCL مربوط به گره B جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

رابطه (۱)

$$I_1=I_2+I_3 \Rightarrow \frac{V_A-V_B}{R_1}=\frac{V_B-V_C}{R_2}+\frac{V_B-V_D}{R_3}$$

پس همان طور که می بینید برای نوشتن معادله جریان کیرشهوف می توانیم به جای جریان شاخه ها، از ولتاژ گره های مدار استفاده کنیم.

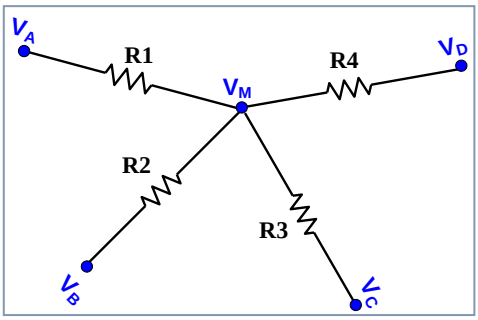
راستی در مدار فوق اگر جمیع جریانهای مدار را به طرف داخل گره B فرض کنیم، معادله مدار به چه شکل می شود؟ همانند قبل معادله جریان را می نویسیم و با ولتاژ جایگذاری می کنیم:

رابطه(۲):

$$\left.\begin{aligned} &I_1+I_2+I_3=0\\ &I_1=\frac{V_A-V_B}{R_1}\\ &I_2=\frac{V_C-V_B}{R_2}\\ &I_3=\frac{V_D-V_B}{R_3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{V_A-V_B}{R_1}+\frac{V_C-V_B}{R_2}+\frac{V_D-V_B}{R_3}=0$$

اگر رابطه (۲) را با رابطه (۱) مقایسه کنیم میبینیم که در حقیقت این دو معادله یک معادله هستند و اگر در معادله (۲)، جمله دوم و سوم را به طرف دوم تساوی منتقل کنیم، رابطه (۱) به دست می آید. به عبارت دیگر، جهت جریان هیچ تاثیری بر روی معادله نمی کند و ما هنگامی که معادله جمع جریان را می خواهیم بنویسیم می توانیم جمیع جریان ها را به طرف داخل گره، فرض کنیم و به سهولت در هر گره ای به شکل ۲-۳، معادله زیر را بنویسیم:

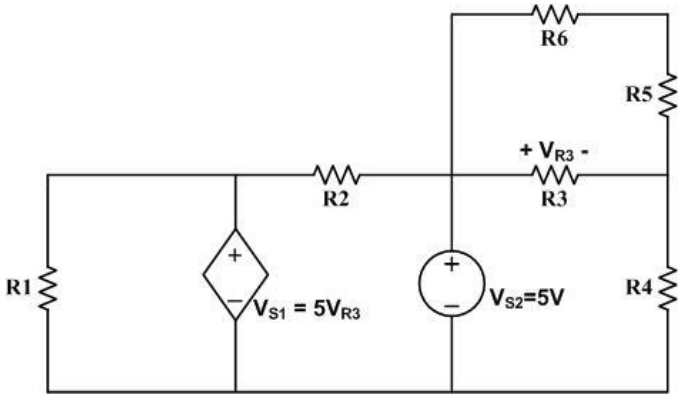
$$\frac{V_A-V_M}{R_1}+\frac{V_B-V_M}{R_2}+\frac{V_C-V_M}{R_3}+\ldots=0$$



شکل ۲-۳: یک گره

روش ولتاژ گره

بر اساس مطالبی که تاکنون در این فصل دیده ایم، روش جدیدی را برای تحلیل مدارها فرا می گیریم که روش *ولتاژ* گره نام دارد. فرض کنید که بخواهیم مدار شکل ۲-٤ را با استفاده از روش ولتاژ گره تحلیل کنیم و پارامترهای مختلف مدار را به دست آوریم.

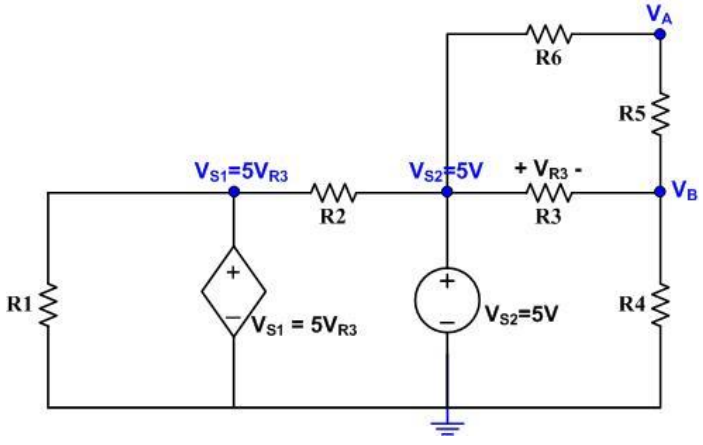


شکل ۲-۴: یک مدار نمونه

هنگامی که بخواهیم مداری را به روش ولتاژ گره حل کنیم در این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱. **انتخاب زمین برای مدار:** اگر از قبل زمین مدار مشخص نشده است، یکی از گره های مدار را به عنوان زمین انتخاب می کنیم. منظور از زمین، نقطه ای از مدار است که ولتاژ گره های دیگر را نسبت به آن نقطه به دست می آوریم. زیرا هنگامی که صحبت از ولتاژ نقطه ای می کنیم، ولتاژ آن نقطه را داریم با ولتاژ نقطه دیگری مقایسه می کنیم.
اما چه نقطه ای را به عنوان زمین انتخاب کنیم؟ بهتر است گره ای را به عنوان زمین انتخاب کنیم که بیشترین تعداد منبع ولتاژ به آن گره متصل باشد و بیشترین تعداد شاخه از آن منشعب شده باشد. زیرا که در این صورت تحلیل مدار ساده تر خواهد شد. همان طور که در شکل ۲-۵ نشان داده شده است، اگر ما سر پایین منبع ولتاژ را به عنوان زمین فرض کنیم، بیشترین منبع ولتاژ به آن متصل شده است و بیشترین تعداد شاخه نیز به آن متصل است.

۲. **نامگذاری گره ها:** توجه داشته باشید که ما در عمل به دنبال نامگذاری سطوح مختلف ولتاژی هستیم که در مدار وجود دارد و بنابراین به نقاطی که اختلاف پتانسیلی بینشان وجود ندارد یک نام را اختصاص می دهیم. برای اینکه سطوح مختلف ولتاژ را در مداری نامگذاری کنیم از نقطه دلخواهی شروع به حرکت می کنیم. تا مادامی که از عنصری عبور نکرده ایم داخل همان سطح ولتاژ قبلی قرار داریم. اما به مجرد اینکه از عنصری عبور کنیم وارد سطح پتانسیل جدیدی شده ایم. اگر این سطح پتانسیل را از قبل نامگذاری نکرده ایم آن را نامگذاری می کنیم و به سفر خود در مدار ادامه می دهیم تا تمامی سطوح پتانسیل مدار را نامگذاری کنیم. توجه داشته باشید که در مواردی که یک سر منبع ولتاژی به زمین و سر دیگر آن به گره ای متصل است، ولتاژ گره معلوم است و برابر با ولتاژ منبع است و بنابراین ولتاژ چنین گره ای را به اندازه ولتاژ آن قرار می دهیم و از اختصاص نام جدید به آن پرهیز می کنیم. زیرا نامگذاری آن به معنی تعریف کردن یک مجهول جدید است در حالی که مقدار آن را می دانیم. به طور مثال، در مدار نمونه ای که در حال تحلیل هستیم، یک سر منبع ولتاژ S_1 به زمین متصل است، پس ولتاژ سر مثبت آن $+V_{S1}$ است. توجه دارید که اگر سر مثبت منبع ولتاژ به زمین متصل بود و سر منفی آن به گره ای وصل شده بود، ولتاژ گره $-V_{S1}$ می شد. همچنین توجه داشته باشید که اگر هیچ یک از سرهای منبع ولتاژی به زمین متصل نباشد، هیچ ولتاژی را نمی توانیم به سرهای آن نسبت دهیم. به طور مشابه، برای منبع ولتاژ S_2 نیز می دانیم که سر مثبت آن دارای ولتاژ $+V_{S2}$ است. شکل زیر را ببینید.



شکل ۲-۵

۳. **نوشتن معادله جریان برای گره ها:** اکنون معادله جریان (KCL) را، بر حسب ولتاژ گره ها، برای گره هایی که مقدار ولتاژشان مجهول است می نویسیم و سپس معادلات را حل می کنیم.
در مدار نمونه، ولتاژ گره های A و B مجهول است. بنابراین برای آنها معادله KCL را بر حسب ولتاژ گره ها مینویسیم.

برای گره A داریم:

$$\frac{V_{S2}-V_A}{R_6}+\frac{V_B-V_A}{R_5}=0$$

و برای گره B داریم:

$$\frac{V_{S2}-V_B}{R_3}+\frac{V_A-V_B}{R_5}+\frac{0-V_B}{R_4}=0$$

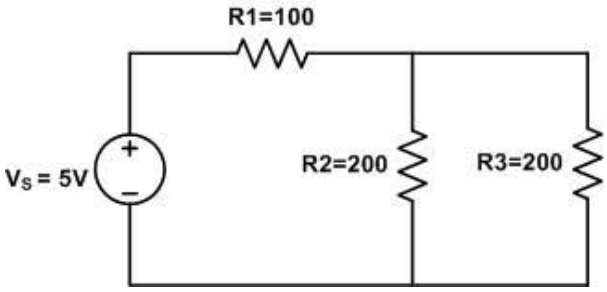
حال دو معادله داریم و دو مجهول که با حل کردن آنها مقادیر V_A و V_B به دست می آید.

۴. **به دست آوردن کمیتهای مورد نیاز:** در مواردی که کمیتهایی به غیر از ولتاژ گره ها مورد نظر است به نوشتن روابطی مقدار کمیت مورد نظر را به دست می آوریم. مثلا اگر جریان شاخه ای را می خواهیم به دست آوریم با استفاده از قانون اهم، جریان شاخه را از روی ولتاژ گره ها به دست می آوریم.

در زیر به تحلیل چندین مدار با استفاده از روش ولتاژ گره می پردازیم.

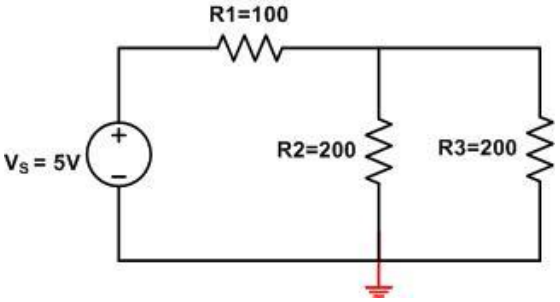
مثال ۲-۱

در مدار زیر مقدار ولتاژ دو سر R2 را با استفاده از روش ولتاژ گره به دست آورید.



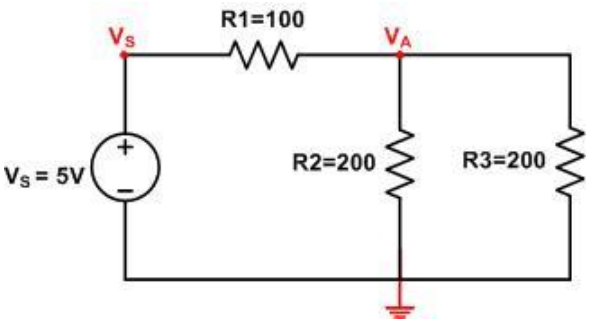
پاسخ:

۱. ابتدا گره ای از مدار را به عنوان زمین، انتخاب می کنیم. به خط پایین مدار، منبع ولتاژی اتصال یافته و بیشترین تعداد انشعاب (۳ تا انشعاب) نیز به آن متصل است. پس آن را به عنوان زمین انتخاب می کنیم.



۲. سپس گره هایی که ولتاژ آنها مجهول هستند را نامگذاری می کنیم:

- ولتاژ سر بالایی منبع V_S را می دانیم زیرا که سر پایینی آن زمین است و بنابراین ولتاژ سر بالایی آن که به قطب مثبت منبع ولتاژ متصل شده برابر است با $V_S = +V_S + 0$. بنابراین از آنجایی که ولتاژ آن مجهول نیست نیازی به نامگذاری و اختصاص مجهول ندارد.
- از مقاومت R1 که عبور کنیم به سطح ولتاژ جدیدی وارد می شویم که مقدار آن را نمی دانیم. پس آن را نامگذاری می کنیم.
- بنابراین در این مدار سه سطح ولتاژ داریم: سطح زمین، سطح V_S و سطح V_A.



۳. حال برای گره مجهول مدار معادله KCL را بر حسب ولتاژ می نویسیم:

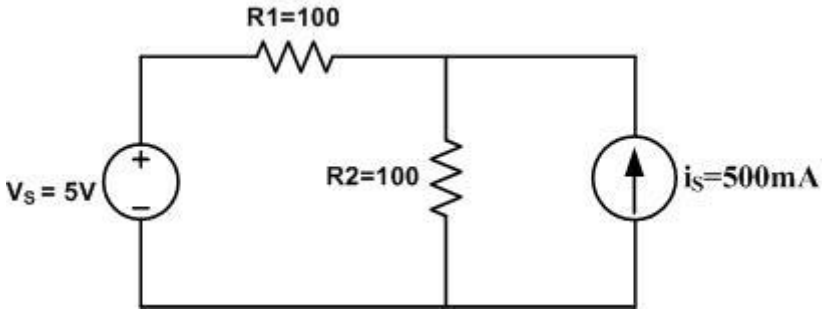
$$\frac{V_S - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} + \frac{0 - V_A}{R_3} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{5 - V_A}{100} + \frac{0 - V_A}{200} + \frac{0 - V_A}{200} = 0 \Rightarrow 5 = 2V_A \Rightarrow V_A = 2.5V$$

۴. ولتاژ دو سر مقاومت R2، از تفاضل ولتاژ دو سر آن به دست می آید:

$V_{R2} = V_A - 0 = 2.5 - 0 = 2.5V$

مثال ۲-۲

در مدار زیر جریان گذرا از R2 را با استفاده از روش ولتاژ گره به دست آورید.



پاسخ:

۱. ابتدا گره ای از مدار را به عنوان زمین، انتخاب می کنیم. به خط پایین مدار، منبع ولتاژی متصل شده است و بیشترین تعداد انشعاب (۳ تا انشعاب) را نیز دارد. پس آن را به عنوان زمین انتخاب می کنیم.

۲. سپس گره‌هایی که ولتاژ آنها مجهول هستند را نامگذاری می کنیم:

- ولتاژ سر بالایی منبع V_S را می دانیم زیرا که سر پایینی آن زمین است و بنابراین ولتاژ سر بالایی آن که به قطب مثبت منبع ولتاژ متصل شده برابر است با $V_S = +V_S + 0$. بنابراین از آنجایی که ولتاژ آن مجهول نیست نیازی به نامگذاری و اختصاص مجهول ندارد.
- از مقاومت R1 که عبور کنیم به سطح ولتاژ جدیدی وارد می شویم که مقدار آن را نمی دانیم. پس آن را نامگذاری می کنیم.
- بنابراین در این مدار سه سطح ولتاژ داریم: سطح زمین، سطح V_S و سطح V_A.

۳. حال برای گره مجهول مدار معادله KCL را بر حسب ولتاژ می نویسیم:

$$\frac{V_S - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} + I_S = 0$$

توضیح: در شاخه سمت راست مدار، مقاومتی وجود ندارد که بتوانیم از تقسیم کردن ولتاژ دو سر آن بر مقاومت آن، جریان شاخه را به دست آوریم. اما از آنجایی که این شاخه حاوی منبع جریان است، پس همیشه از این شاخه به اندازه منبع جریان، از آن جریان می گذرد و جریان گذرا از این شاخه برابر I_S است که آن را در معادله فوق می گذاریم. با توجه به اینکه در هنگام نوشتن معادله جریان گره ها، فرض می کنیم که جهت همه جریانها به طرف داخل گره هستند، و با توجه به اینکه جهت این منبع جریان نیز به طرف داخل گره V_A است پس می نویسیم $+I_S$. اما اگر جهت منبع جریان به طرف بیرون از گره بود می نوشتیم $-I_S$.

حال معادله فوق را حل می کنیم:

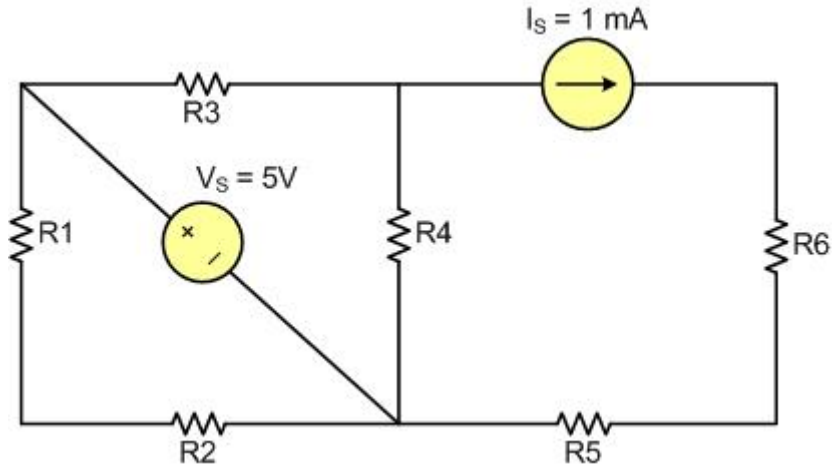
$$\frac{50-V_A}{100}+\frac{0-V_A}{100}+500m=0$$
$$\Rightarrow 50-V_A+0-V_A+0.5\times 100=0$$
$$\Rightarrow 100=2V_A \Rightarrow V_A=50$$

۴. جهت جریان، از سطح پتانسیل بیشتر، به طرف سطح پتانسیل کمتر است. پس جهت جریان از گره A، با ولتاژ 50V+، به طرف زمین، با ولتاژ ۰ ولت، است.برای به دست آوردن جریان گذرا از R2 کافی است که ولتاژ دو سر آن را بر مقاومت آن تقسیم کنیم:

$$i_{R2}=\frac{V_A-0}{R_2}=\frac{50}{100}=500mA$$

مثال ۲-۳

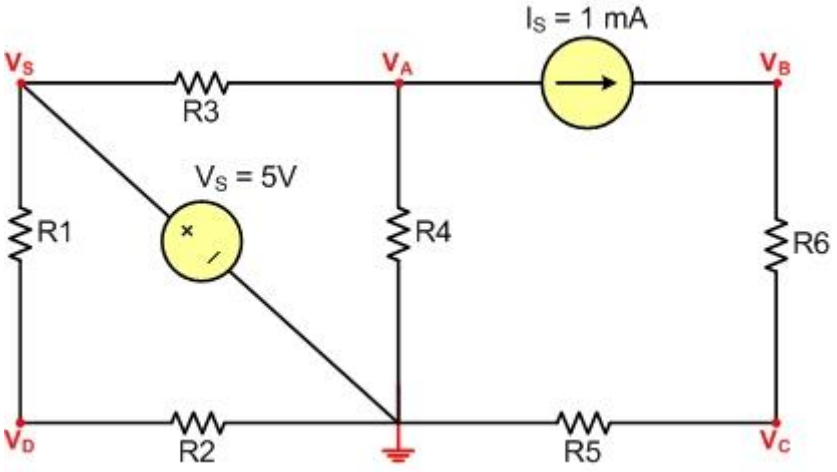
در مدار زیر، ولتاژ دو سر مقاومت R4 را حساب کنید. مقدار جمیع مقاومتها را 1K فرض کنید.



حل:

۱. ابتدا یکی از گره های مدار را به عنوان زمین انتخاب می کنیم. سر منفی منبع ولتاژ، مناسب ترین نقطه برای زمین است. زیرا هم بیشترین تعداد منبع ولتاژ به آن متصل است و هم بیشترین تعداد انشعاب را دارد.

۲. سپس گره هایی که ولتاژ آنها مجهول هستند را نامگذاری می کنیم:



۳. معادلات را برای گره هایی که ولتاژ آنها مجهول است می نویسیم:

- در گره A داریم:

$$\frac{V_S - V_A}{R_3} + \frac{0 - V_A}{R_4} - I_S = 0$$

- در گره B داریم:

$$I_S + \frac{V_C - V_B}{R_6} = 0$$

- در گره C داریم:

$$\frac{V_B - V_C}{R_6} + \frac{0 - V_C}{R_5} = 0$$

- در گره D داریم:

$$\frac{0 - V_D}{R_2} + \frac{V_S - V_D}{R_1} = 0$$

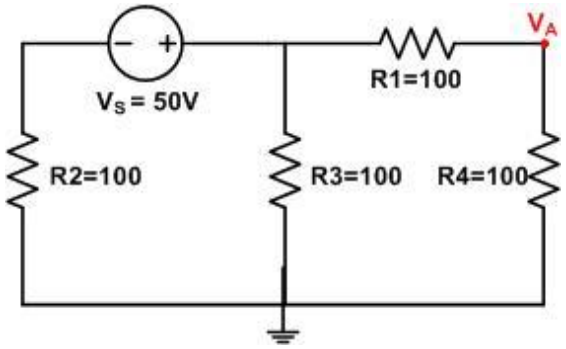
۴. حال اقدام به حل معادلات و محاسبه کمیتهای مورد نیاز می کنیم. در این مساله ما می خواهیم ولتاژ دو سر R4 را به دست آوریم. از آنجایی که یک سر R4 زمین است پس فقط کافی است که ولتاژ V_A را به دست آوریم. در معادله ای که برای گره A نوشته ایم تنها مقدار V_A مجهول است. بنابراین فقط با حل کردن آن معادله، می توانیم مقدار V_A را حساب کنیم.

$$\frac{V_S - V_A}{R_3} + \frac{0 - V_A}{R_4} - I_S = 0 \Rightarrow \frac{5 - V_A}{1K} + \frac{-V_A}{1K} - 1mA = 0 \xrightarrow{\times 1000} 5 - 2V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 2V$$

$$V_{R4} = 2V$$

بخش ۲-۲: ابر گره

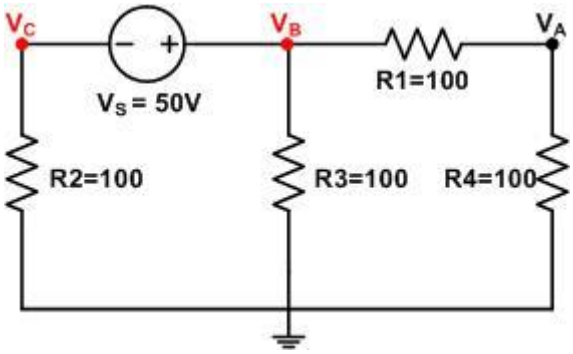
فرض کنید بخواهیم در مدار زیر با روش ولتاژ گره، ولتاژ گره A را نسبت به زمین اعلام شده، به دست آوریم.



شکل ۲-۶: یک مدار

۱. در این مدار چون که زمین از قبل مشخص شده، بنابراین نیازی به انتخاب زمین نیست.

۲. گره هایی که ولتاژ آنها مجهول است را نامگذاری می کنیم. به غیر از گره A، دو گره مجهول دیگر داریم که در دو طرف منبع ولتاژ Vs قرار دارند. آنها را نیز به ترتیب V_B و V_C می نامیم.

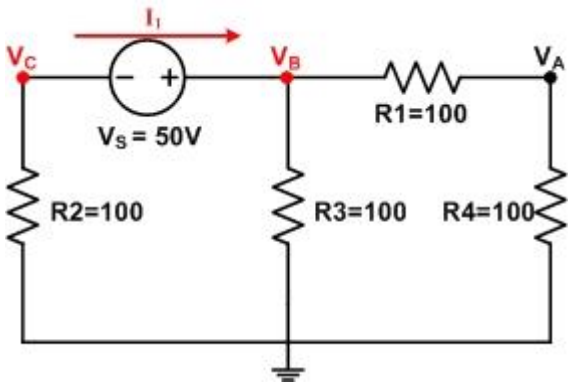


۳. حال برای گره های مجهول، معادله می نویسیم:

- برای گره A داریم:

$$\frac{V_B - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_4} = 0 \quad \text{معادله یک:}$$

- برای گره B هنگامی که بخواهیم معادله بنویسیم، برای نوشتن معادله جریان برای شاخه ای که حاوی Vs است دچار مشکل می شویم. آیا چه معادله ای می توانیم برای جریان این شاخه بیان کنیم؟ اگر این شاخه مقاومت داشت، جریان آن را از تقسیم ولتاژ دو سر آن بر مقاومت آن بیان می کردیم و اگر حاوی منبع جریان بود، جریان شاخه برابر جریان منبع جریان می بود. همین مشکل را زمانی که بخواهیم معادله را برای گره C بنویسیم نیز خواهیم داشت. اگر فرض کنیم که جریان I_1 از سر منفی منبع ولتاژ به سر مثبت منبع ولتاژ در حال گذر باشد، در گره B داریم:



$$I_1 + \frac{0 - V_B}{R_3} + \frac{V_A - V_B}{R_1} = 0$$

- همچنین در گره C داریم:

$$\frac{0 - V_C}{R_2} - I_1 = 0 \Rightarrow \frac{0 - V_C}{R_2} = I_1$$

- اگر مقدار I_1 را در گره C به دست آوریم و در داخل معادله مربوط به گره B قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{0 - V_C}{R_2} + \frac{0 - V_B}{R_3} + \frac{V_A - V_B}{R_1} = 0 \quad \text{معادله دو:}$$

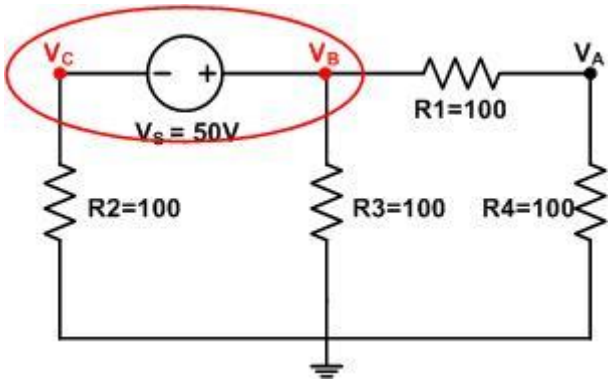
- بنابراین ما تاکنون ۲ معادله داریم (معادله یک و معادله دو) و سه تا مجهول VA، VB و VC. بنابراین به یک معادله دیگر نیاز داریم. با توجه به اینکه بین گره های B و C، یک منبع ولتاژ وجود دارد، پس به عنوان سومین معادله می توانیم بنویسیم:

$$V_C + V_S = V_B \quad \text{معادله سه:}$$

- حال سه معادله فوق را حل می کنیم تا ولتاژ گره های مختلف محاسبه شوند.

راه حل ابر گره

هنگامی که مداری را با استفاده از ولتاژ گره حل می کنیم اگر به شاخه ای برخورد کردیم که فقط حاوی منبع ولتاژ باشد، راه حل دیگری که در این موارد می توانیم به کار ببندیم این است که دور منبع ولتاژ، دایره ای می کشیم که آن را ابر گره می نامیم و همانند گره می گوییم که جمع جبری جریانهای وارد شده و خارج شده به ابر گره، صفر است. زیرا همان طوری که در گره، الکترونی خلق یا نبود نمی شد، در ابر گره نیز الکترونی خلق و نابود نمی‌شود. بلکه به همان تعداد الکترونی که وارد ابر گره می شود به همان تعداد نیز می بایست خارج شوند:



- در شکل فوق، جریانهایی که به ابر گره وارد یا خارج میشوند عبارتند از جریانهای گذرا از R2 و R1 و R3. پس معادله زیر را می نویسیم:

$$\frac{0-V_C}{R_2}+\frac{0-V_B}{R_3}+\frac{V_A-V_B}{R_1}=0 \quad \textit{معادله دو:}$$

در هنگام حل کردن مدار شکل ۲-۵، هنگامی که جریان گذرا از منبع ولتاژ را I1 فرض کردیم و معادلات مربوط به گره های B و C را حل کردیم نیز دقیقا به معادله فوق رسیدیم. اما با روش ابرگره سریع تر به این معادله رسیدیم.

- هنگامی که ما از ابر گره استفاده کنیم، برای دو تا از گره ها، یک معادله می نویسیم و به عبارتی یک معادله از دست می دهیم. اما از آنجایی که رابطه مشخصی بین ولتاژ دو سر منبع ولتاژ وجود دارد، بنابراین می توانیم به سهولت رابطه ای برای دو گره ای که مشمول ابرگره شده اند بنویسیم تا یک معادله از دست رفته جبران می شود. مثلا در شکل فوق داریم:

$$V_C+V_S=V_B \quad \textit{معادله سه:}$$

- حال سه معادله فوق را حل می کنیم تا ولتاژ گره های مختلف محاسبه شوند.

توضیح ۱: در مدار شکل ۲-٦، اگر از ابتدا، زمین مدار مشخص نشده بود، زمین مدار را در گره ای که بالای مقاومت R3 قرار دارد (یعنی در نقطه ای که گره B نامیده ایم) در نظر می گرفتیم. زیرا در گره B، علاوه بر اینکه تعداد انشعابات بیشینه است، تعداد منابع ولتاژ متصل به آن نیز بیشینه است که در آن صورت، اصلا ابر گره ای اتفاق نمی افتاد و تعداد گره های مجهول نیز کمتر میشد و بنابراین به جای ۳ معادله ۳ مجهول، دو معادله ۲ مجهول داشتیم. بنابراین در این مثال اهمیت انتخاب کردن صحیح زمین را به وضوح می بینید. البته ناگفته نماند که در برخی مدارها که تعداد منابع ولتاژ بیشتر از یکی است و منابع ولتاژ به گره همسانی متصل نیستند، مجبور به استفاده از روش ابرگره استفاده می شویم.

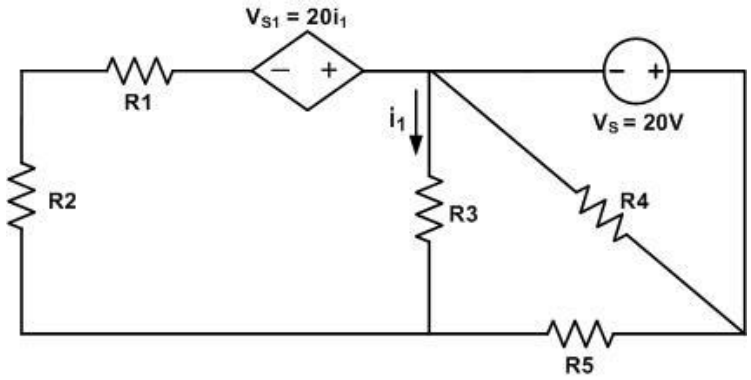
توضیح ۲: مفهوم ابر گره، مفهوم ناآشنایی نیست؛ جریانی که به یک سر منبع ولتاژ وارد می شود با جریانی که از سر دیگر خارج میشود با هم برابر است. در شکل ۲-۵، جریان وارد شده از سر منفی منبع ولتاژ، برابر جریان خارج شونده از R2 است و جریان گذرا از سر مثبت منبع ولتاژ برابر جریانهای گذرا از R1 و R3 است که با برابر قرار دادن جریان وارد شونده و خارج شونده از منبع ولتاژ به همان معادله ای می رسیم که با ابر گره رسیدیم. اما مفهوم ابر گره ما را کمک کرد که راحت تر این معادله را بنویسیم و همه جریانها را به طرف داخل ابر گره بگیریم و در نوشتن علامتهای مثبت و منفی، اشتباه نکنیم.

بخش ۲-۳: حل چندین مدار به روش ولتاژ گره و ابرگره

در این بخش، به منظور ممارست هر چه بیشتر با روش ولتاژ گره، مثالهای بیشتری را حل می کنیم.

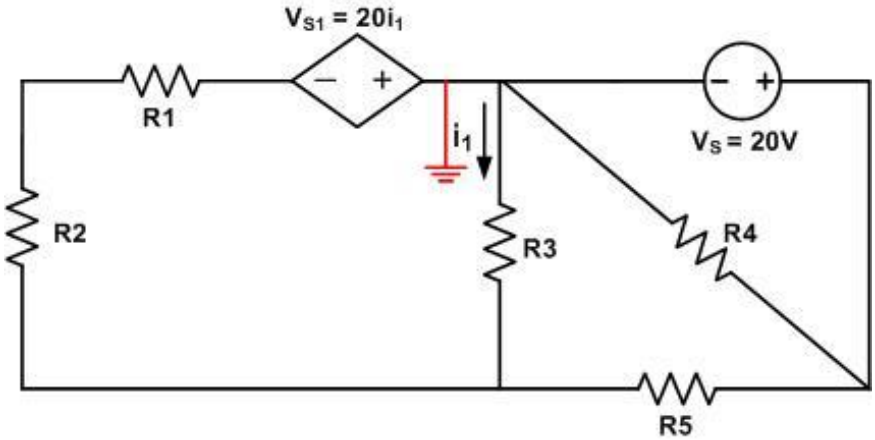
مثال ۲-۴

در مدار زیر، جریان i_1 را محاسبه کنید.

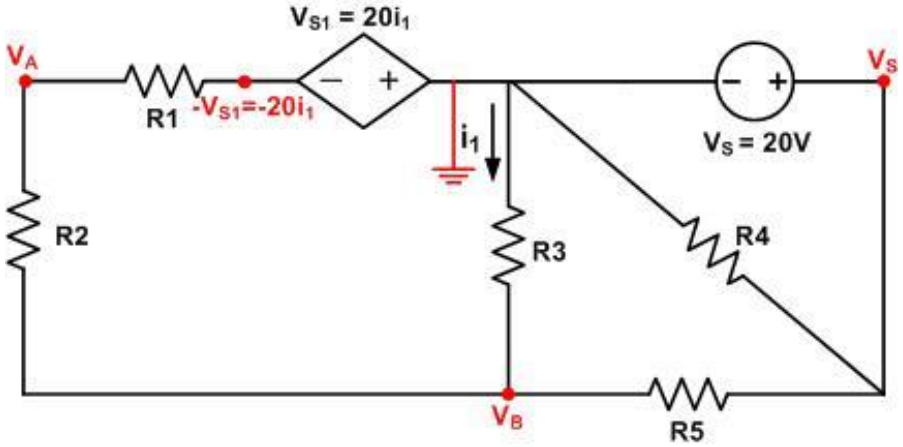


پاسخ:

۱. ابتدا، گره ای را به عنوان زمین انتخاب می کنیم. به سر بالایی مقاومت R_3 بیشترین تعداد انشعاب و بیشترین تعداد منبع ولتاژ متصل شده است؛ پس آن را به عنوان زمین مدار انتخاب می کنیم.



۲. گره هایی که ولتاژ آنها مجهول است را نامگذاری می کنیم.



۳. برای گره های مجهول معادله می نویسیم و آنها را حل می کنیم:

- در گره A داریم:

$$\frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{-V_{S1} - V_A}{R_1} = 0$$

i. در رابطه فوق V_{S1} برابر با $20i_1$ است و از طرفی مقدار i_1 را می توانیم بر حسب ولتاژ دو سر مقاومت R_3 به دست آوریم:

$$i_1 = \frac{0 - V_B}{R_3} = \frac{-V_B}{R_3} \Rightarrow V_{S1} = 20i_1 = \frac{-20V_B}{R_3}$$

ii. با جایگذاری کردن مقدار V_{S1} در معادله گره A داریم:

$$\frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{\frac{20V_B}{R_3} - V_A}{R_1} = 0 \quad \text{معادله یک:}$$

- در گره B داریم:

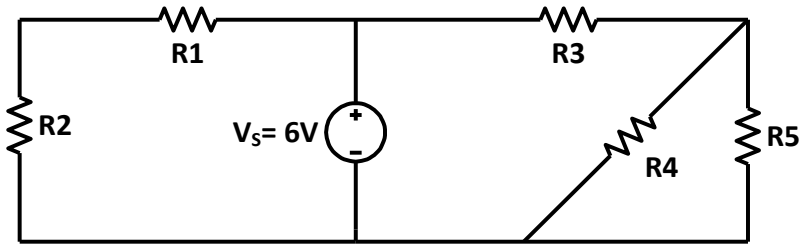
$$\frac{V_A - V_B}{R_2} + \frac{0 - V_B}{R_3} + \frac{V_S - V_B}{R_5} = 0 \quad \text{معادله دو:}$$

- در فوق دو معادله داریم و دو مجهول (V_A و V_B) که با حل کردن آنها مقدار مجهولها به دست می آیند.

مثال ۲-۵

در مدار زیر، با استفاده از روش ولتاژ گره (node)، جریان گذرا از R4 را محاسبه کنید. مقدار مقاومتها را برابر ۲۰ کیلو فرض کنید.

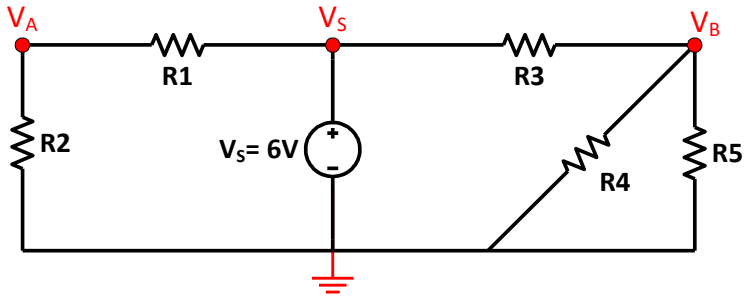
ابتدا ولتاژ گره ها را حساب کنید و سپس از روی آن مقدار جریان R4 را محاسبه کنید.



حل:

۱. ابتدا گره ای را به عنوان زمین انتخاب می کنیم. با توجه به اینکه گره پایینی بیشترین تعداد شاخه را دارد و منبع ولتاژی به آن متصل است، آن را به عنوان زمین انتخاب می کنیم.

۲. سپس سایر گره ها را نامگذاری می کنیم.



۳. حال برای گره های مجهول معادله می نویسیم:

$$(V_S-V_A)/R1 + (0-V_A)/R2 = 0$$

$$(V_S-V_B)/R3 + (0-V_B)/R5 + (0 - V_B)/R4 = 0$$

۴. با حل کردن معادلات بالا ولتاژ گره های مختلف مدار به دست می آید. البته ما برای به دست آوردن جریان گذرا از R4 کافی است که فقط ولتاژ V_B را نسبت به زمین بدانیم تا ولتاژ دو سر مقاومت R4 را بدانیم و از آن جریانش را حساب کنیم. اگر مقدار مقاومتها را در معادله بگذاریم، معادله گره B به صورت زیر خواهد شد:

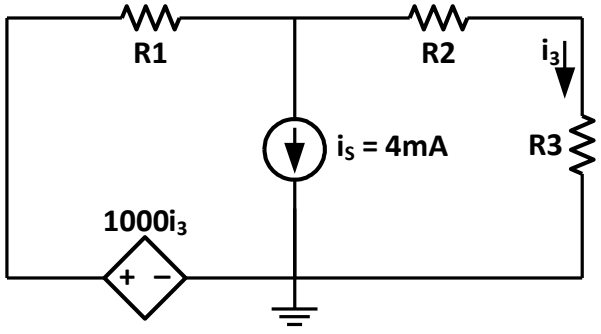
$$(6-V_B)/20K -V_B/20K -V_B/20K = 0 \rightarrow 6 - V_B - V_B - V_B = 0 \rightarrow 6 = 3V_B \rightarrow V_B = 2\ V$$

پس جریان گذرا از R4 برابر است با:

$$i_{R4} = (V_B - 0)/R4 = 2/20K = 0.1mA$$

مثال ۲-۶

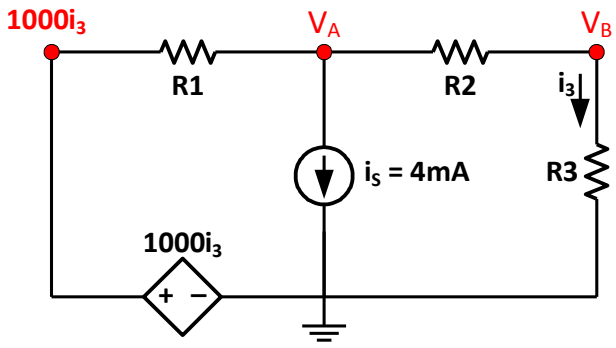
در مدار زیر، ولتاژ گره ها را نسبت به زمین حساب کنید. اندازه جمیع مقاومتها را برابر ۱ کیلو در نظر بگیرید.



حل:

۱. ابتدا گره ای را به عنوان زمین انتخاب می کنیم. با توجه به اینکه گره پایینی بیشترین تعداد شاخه را دارد و منبع ولتاژی به آن متصل است، آن را به عنوان زمین انتخاب می کنیم.

۲. سپس سایر گره ها را نامگذاری می کنیم.



۳. حال برای گره های مجهول معادله می نویسیم:

در گره A، معادله به صورت زیر است:

$$(1000i_3 - V_A) / R1 - i_S + (V_B - V_A) / R2 = 0 \rightarrow (1000i_3 - V_A) / 1K - i_S + (V_B - V_A) / 1K = 0$$

که اگر طرفین تساوی را در ۱۰۰۰ ضرب کنیم خواهیم داشت

$$\rightarrow 1000i_3 - V_A - 1000\, i_S + V_B - V_A = 0 \rightarrow 1000i_3 - V_A - 4 + V_B - V_A = 0$$

$$\rightarrow 1000i_3 - 2V_A - 4 + V_B = 0$$

از روی شکل می بینیم که مقدار i3 برابر است با:

$$i_3 = V_B / R3 = V_B / 1000$$

که با جایگذاری در معادله قبلی داریم:

$$1000V_B/1000 - 2VA - 4 + VB = 0 \rightarrow 2VB - 2VA - 4 = 0 \rightarrow VB - VA = 2$$

در گره B، معادله به صورت زیر است:

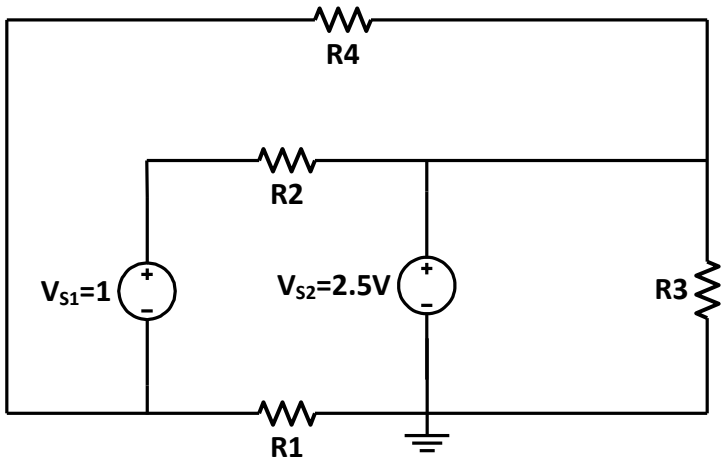
$$(V_A - V_B) / R2 + (0 - V_B) / R3 = 0 \rightarrow V_A - V_B - V_B = 0 \rightarrow V_A = 2V_B$$

که اگر این معادله را در معادله قبلی بگذاریم خواهیم داشت:

$$V_B - 2V_B = 2 \rightarrow V_B = -2 \rightarrow V_A = -4$$

مثال ۲-۷

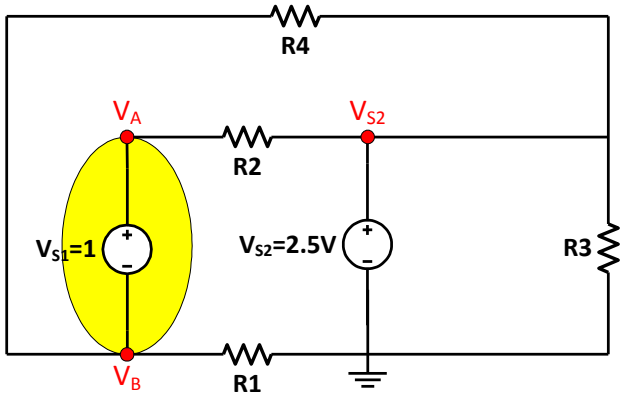
در مدار زیر، ولتاژ گره ها را نسبت به زمین حساب کنید. همه مقاومتها را برابر ۲ کیلو در نظر بگیرید.)



حل:

۱. ابتدا گره ای را به عنوان زمین انتخاب می کنیم. گره هایی که سر منابع ولتاژ S1 و S2 واقع شده اند از لحاظ تعداد منابع ولتاژ شرایط یکسانی را دارند و همه آنها دارای یک منبع ولتاژ هستند. اما تعداد انشعاب، در گره هایی که در دو سر منبع S2 قرار گرفته اند، ۳ تا است در حالی که تعداد انشعاب برای گره های دو سر منبع S1، ۲ تا است. پس یکی از گره های دو سر منبع S2 را به عنوان زمین انتخاب می کنیم.

۲. سپس ولتاژ گره ها را نام گذاری می کنیم.



۳. سپس شروع به نوشتن معادلات ولتاژ گره برای گره ها می کنیم. در گره های A و B با توجه به وجود منبع ولتاژ نمی توانیم معادله گره را بنویسیم و لازم است که از ابر گره استفاده کنیم:

$$(V_{S2} - V_A) / R2 + (0 - V_B)/ R1 + (V_{S2} - V_B) / R4 = 0 \rightarrow$$

$$(2.5 - V_A)/2K + (- V_B)/2K + (2.5 - V_B)/2K = 0 \rightarrow 5 - V_A - 2\,V_B = 0$$

از طرفی در شکل می بینیم که

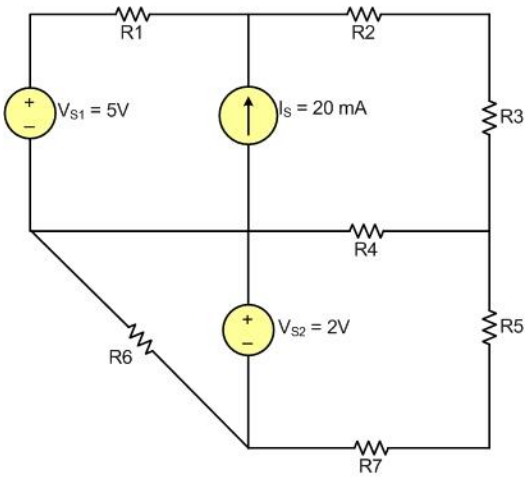
$$V_B + 1 = V_A$$

۴. سپس شروع به حل معادلات می کنیم. با گذاشتن معادله دوم در معادله اول داریم:

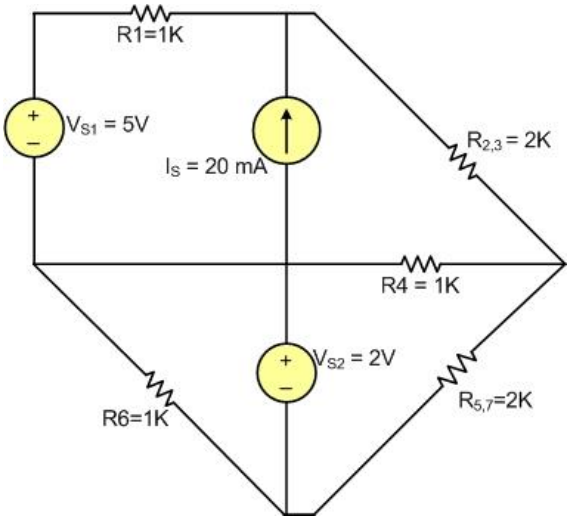
$$5 - (V_B + 1) - 2\,V_B = 0 \rightarrow 4 - 3\,V_B = 0 \rightarrow V_B = 4/3V=1.333V \rightarrow V_A = 7/3V=2.333$$

مثال ۲-۸

در مدار زیر، به روش ولتاژ گره، جریان گذرا از R3 را حساب کنید. همه مقاومتها 1K اهم هستند.

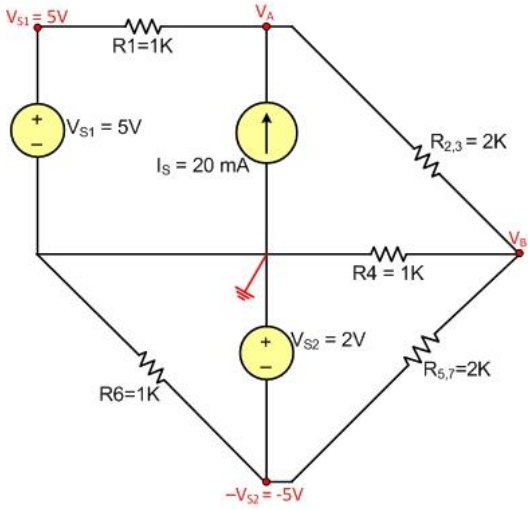


حل: در این مدار مقاومتهای R2 و R3 سری هستند، مقاومتهای R5 و R7 نیز سری هستند و بنابراین به شکل زیر ساده میشوند.



حال به روش ولتاژ گره به محاسبه ولتاژ گره های مختلف می پردازیم

۱. انتخاب زمین: به گره وسط مدار، ۲ تا منبع ولتاژ متصل شده اند و دارای ۵ انشعاب می باشد. بنابراین بهترین گره برای زمین است.
۲. گره های مختلف مدار را نامگذاری می کنیم.



۳. نوشتن معادله جریان برای گره ها:
- در گره A داریم:

$$\frac{V_{S1}-V_A}{R_1}+I_S+\frac{V_B-V_A}{R_{2,3}}=0\Rightarrow\frac{5-V_A}{1K}+20mA+\frac{V_B-V_A}{2K}=0$$

$$\overset{\times 2K}{\Longrightarrow}10-3V_A+40+V_B=0\Rightarrow V_B=3V_A-50$$

- و در گره B داریم:

$$\frac{V_A-V_B}{R_{2,3}}+\frac{0-V_B}{R_4}+\frac{-V_{S2}-V_B}{R_{5,7}}=0\Rightarrow\frac{V_A-V_B}{2K}+\frac{0-V_B}{1K}+\frac{-V_{S2}-V_B}{2K}=0\overset{\times 2K}{\Longrightarrow}V_A-4V_B-2=0$$

۴. به دست آوردن کمیتهای مورد نیاز: از معادله نوشته شده در گره A، مقدار V_B را به دست می آوریم و درون معادله مربوط به گره B می گذاریم:

$$V_A-4V_B-2=0\Rightarrow V_A-4(3V_A-50)-2=0\Rightarrow-11V_A+198=0\Rightarrow V_A=18V$$

$$4\text{V}V_B=3V_A-50=3\times18-50=$$

جریان گذرا از مقاومتهای سری با هم برابر است و جریان گذرا از هر یک از آنها، برابر است با جریان گذرا از مقاومت معادل آنها. بنابراین برای اینکه جریان گذرا از R_3 را حساب کنیم، جریان گذرا از $R_{3,4}$ را محاسبه می کنیم:

$$I_{R3}=I_{R3,4}=\frac{V_A-V_B}{R_{3,4}}=\frac{18-4}{2K}=7mA$$

فصل سوم: مدارهای خطی (Linear Circuits)

در فصلهای گذشته به تحلیل قوانینی پرداختیم که در جمیع مدارها حاکمند. در این فصل، با مدارهای خطی آشنا می شویم و می بینیم که اگر مداری خطی باشد، چه قوانینی در آن وجود دارد.

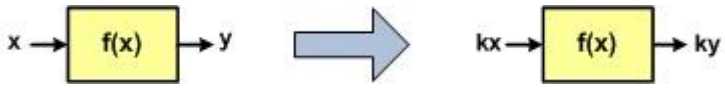
بخش ۳-۱: سیستم های خطی (Linear systems)

مفهوم خطی بودن (Linearity)

زمانی سیستمی خطی است که دارای دو خصلت زیر باشد:

۱. اگر مقدار ورودی، k برابر شود، مقدار خروجی سیستم نیز k برابر شود. یعنی:

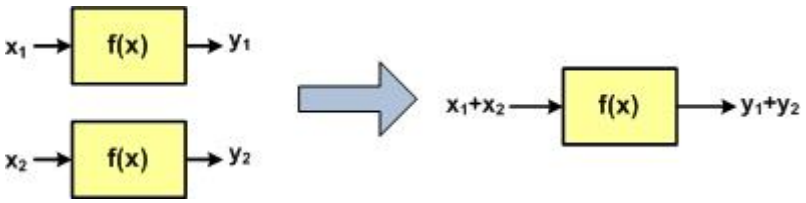
$$f(kx) = k \times f(x)$$



شکل ۳-۱: خصوصیت اول خطی بودن

۲. اگر سیستم به ازای ورودی x_1، خروجی y_1 را بدهد و به ازای x_2، خروجی y_2 را ایجاد کند، آنگاه به ازای ورودی x_1+x_2، نیز مقدار خروجی برابر با $y1 + y2$ باشد. یعنی:

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$



شکل ۳- ۲: خصوصیت دوم خطی بودن

به طور مثال، رابطه بین پول پرداخت شده و کالاهای خرید شده در سوپر مارکتها خطی است. زیرا اگر f را تابع قیمت در نظر بگیریم:

۱. قیمت k تا بستنی برابر است با قیمت یک بستنی ضربدر k:

$$f(k \times x) = k \times f(x)$$

۲. قیمت پرداخت شده به ازای خرید ماست و بستنی برابر است با مجموع قیمت تک تک آنها:

$$f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

در عالم طبیعت نیز برخی روابط خطی هستند و برخی دیگر غیر خطی.

به طور مثال، اگر وزن یک سیب ۱۰۰ گرم و یک نارگیل ۵۰۰ گرم باشد، وزن مجموع آنها ۶۰۰ گرم است و همچنین وزن ۱۰ تا نارگیل ۵۰۰۰ گرم است. پس رابطه وزن اجسام، با آنها خطی است.

همچنین اگر در اتاقی، دو تا چراغ روشن باشد، نوری که از اجسام بازتاب می شود و به چشم ما می رسد حاصل جمع اثر یکایک منابع نور به تنهایی است. بنابراین اگر بخواهیم توسط کامپیوتر، تصویر اتاقی را شبیه سازی کنیم، ابتدا تصویری که توسط هر یک از چراغها به تنهایی ایجاد می شود را به دست می آوریم و سپس این تصاویر را با هم جمع می زنیم تا تصویر نهایی حاصل شود. به عبارت دیگر، خطی بودن روابط نور سبب شده است که بتوانیم تصاویر را به سهولت render کنیم.

در زندگی روزمره، هر کجا روابط به صورت خطی باشد، محاسبات ساده تر است، در مدارها نیز خطی بودن سبب می شود که ما آنها را راحت تر حل کنیم.

مثال ۳-۱: اگر مقاومت را به صورت سیستمی در نظر بگیریم که جریان گذرا از آن، ورودی سیستم باشد و ولتاژ دو سر مقاومت خروجی آن باشد، بررسی کنید که آیا مقاومت سیستمی خطی است یا غیر خطی.

پاسخ:

می دانیم که در مقاومت، رابطه ولتاژ به جریان به صورت v=Ri است. بنابراین اگر مقدار جریان، k برابر شود، ولتاژ دو سر آن نیز k برابر می شود. یعنی:

$$V_{(ki)} = R \times (ki) = k \times Ri = k \times V_{(i)}$$

پس اولین شرط مربوط به خطی بودن در آن حاکم است.

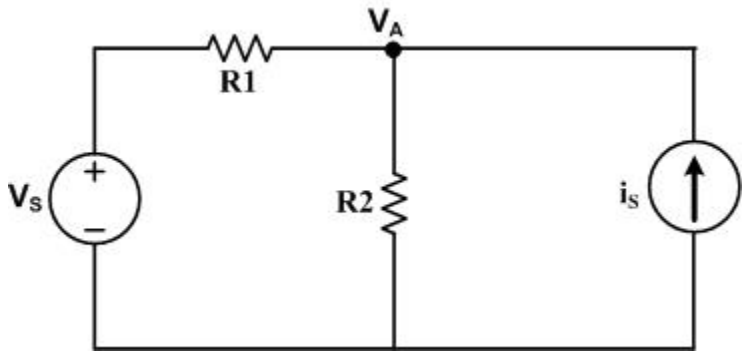
همچنین اگر از مقاومتی جریانی به اندازه $i_1 + i_2$ عبور کند، ولتاژ دو سر آن برابر است با:

$$V_{(i_1+i_2)} = R \times (i_1 + i_2) = Ri_1 + Ri_2 = V_{(i_1)} + V_{(i_2)}$$

پس ولتاژ دو سر مقاومت، زمانی که جریان i_1+i_2 از آن عبور می کند، برابر است با ولتاژی که عبور جریان i1 به تنهایی ایجاد می کند به علاوه ولتاژی که عبور جریان i_2 ایجاد می کند. پس دومین شرط خطی بودن نیز در آن حاکم است و مقاومت عنصری خطی است.

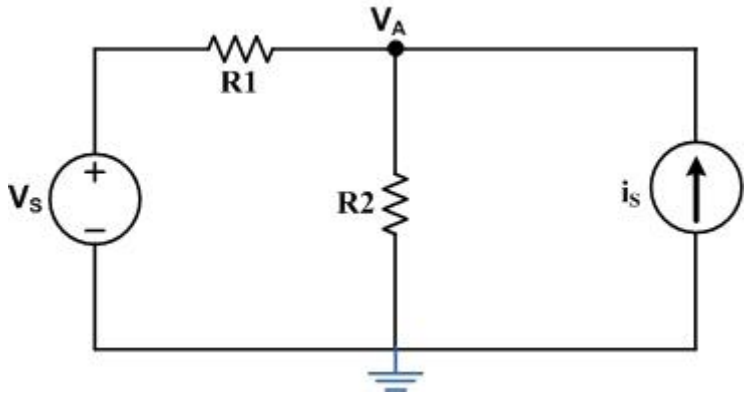
بررسی رفتار مدارهای مقاومتی

بیایید در مدار زیر، ولتاژ گره A را به دست آوریم:



شکل ۳- ۳: یک مدار ساده حاوی مقاومت و منابع ولتاژ و جریان

برای اینکه با استفاده از روش ولتاژ گره، این مدار را حل کنیم، ابتدا یک نقطه را به عنوان زمین انتخاب می کنیم و معادله را برای گره A می نویسیم:



$$\frac{V_S - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} + i_S = 0 \Rightarrow R_2 V_S - R_2 V_A - R_1 V_A + R_1 R_2 i_S = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_S$$

در عبارت فوق، مقاومتها مقادیر ثابتی هستند. بنابراین عبارات $\frac{R_2}{R_1+R_2}$ و $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ مقادیر ثابتی هستند که می توانیم آنها را به صورت ضرایب α و β ساده سازی کنیم:

$$V_A = \alpha V_S + \beta i_S$$

بنابراین مدار مقاومتی فوق را می توانیم به صورت سیستمی در نظر بگیریم که i_S و V_S ورودیهای آن هستند و ولتاژ گره A، خروجی آن را تشکیل می دهد.

مثال ۳-۲

بررسی کنید که آیا در شکل ۳-۳، رابطه بین مقادیر منابع و ولتاژ گره A رابطه خطی است یا نه.

پاسخ:

در این سیستم، اگر مقادیر ورودی، k برابر شود، ولتاژ خروجی برابر است با:

$$f(kV_S, ki_S) = \alpha k V_S + \beta k i_S = k(\alpha V_S + \beta i_S) = k f(V_S, i_S)$$

بنابراین شرط اول خطی بودن در آن برقرار است. حال شرط دوم را بررسی می کنیم:

$$f(V_{S1}+V_{S2}, i_{S1}+i_{S2}) = \alpha(V_{S1} + V_{S2}) + \beta(i_{S1} + i_{S2}) = \alpha V_{S1} + \beta i_{S1} + \alpha V_{S2} + \beta i_{S2} = f(V_{S1}, i_{S1}) + f(V_{S2}, i_{S2})$$

بنابراین شرط دوم خطی بودن نیز برقرار است و رابطه خطی است.

مثال ۳-۳: در مدار شکل ۳-۳، یکبار ولتاژ منبع ولتاژ را ۵ ولت داده ایم و جریان منبع جریان را صفر کرده ایم و ولتاژ گره A، ۲,۵ ولت شده است. بار دیگر جریان منبع جریان را ۲ میلی آمپر کرده ایم و ولتاژ منبع ولتاژ را صفر کرده ایم و ولتاژ گره A، ۲ ولت شده است. حساب کنید که اگر جریان منبع جریان ۶ میلی آمپر باشد و ولتاژ منبع ولتاژ ۱۰ ولت باشد، ولتاژ گره A، چقدر میشود.

پاسخ: می دانیم که رابطه ای خطی به شکل $V_A = \alpha V_S + \beta i_S$ برای ولتاژ گره A وجود دارد. بنابراین کافی است که ضرایب α و β را حساب کنیم تا بتوانیم با استفاده از آن، ولتاژ گره A را به ازای ورودیهای مختلف برآورد کنیم.

$$V_S = 5;\ i_S = 0;\ V_A = 2.5 \Rightarrow 2.5 = \alpha \times 5 + \beta \times 0 \Rightarrow \alpha = 0.5$$

$$V_S = 0;\ i_S = 2mA = 2 \times 10^{-3};\ V_A = 2 \Rightarrow 2 = \alpha \times 0 + \beta \times 2 \times 10^{-3} \Rightarrow \beta = 1000$$

بنابراین معادله مربوط به ولتاژ گره A به صورت زیر است:

$$V_A = 0.5V_S + 1000i_S$$

بنابراین زمانی که منبع جریان ۶ میلی آمپر و منبع ولتاژ ۱۰ ولت است، ولتاژ گره A برابر است با:

$$V_A = 0.5 \times 10 + 1000 \times 6mA = 5 + 6 = 11V$$

اگر چه ما در فوق یک مدار خاص را تحلیل کردیم. اما در جمیع مدارهای مقاومتی، ولتاژ و جریان جمیع نقاط مدار رابطه ای خطی با ولتاژها و جریانهای منابع مدار دارند.

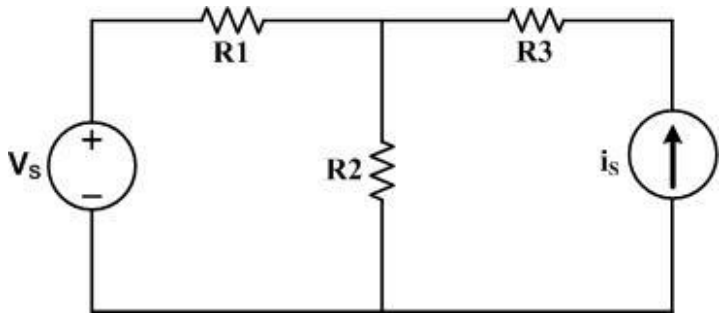
بخش ۳-۲: تحلیل مدارهای خطی به روش جمع آثار

به کار بردن خاصیت جمع آثار در تحلیل مدار

جمع آثار بیان می کند که در مداری که چندین منبع مستقل و تعدادی مقاومت و منابع وابسته وجود داشته باشد، اثری که در هر نقطه از مدار به وجود می آید برابر است با حاصل جمع اثری که تک تک منابع به تنهایی، در آن نقطه، ایجاد می کنند. به طور نمونه مثال زیر را ببینید.

مثال ۳-۴

مدار زیر را در نظر بگیرید.



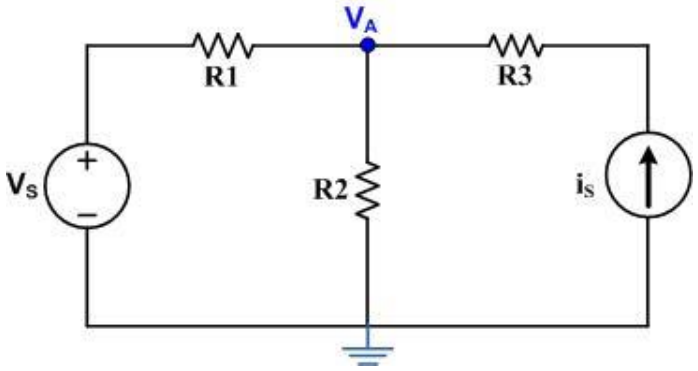
الف) ولتاژ دو سر مقاومت R2 را حساب کنید.

ب) اگر منبع ولتاژ، خاموش باشد (ولتاژ دو سر آن صفر باشد) ولتاژ دو سر R2 چیست؟

ج) اگر منبع جریان، خاموش باشد (جریان گذرا از آن صفر باشد) ولتاژ دو سر R2 را حساب کنید.

حل:

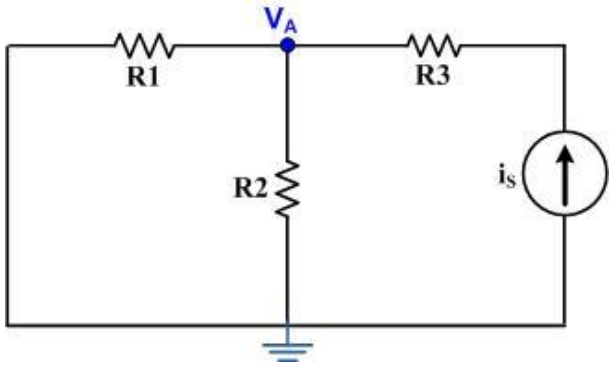
الف) برای بدست آوردن ولتاژ دو سر مقاومت R2 از روش ولتاژ گره استفاده می کنیم:



$$\frac{V_S - V_A}{R1} + \frac{0 - V_A}{R2} + i_S = 0 \Rightarrow \frac{V_S}{R1} - V_A\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) + i_S = 0 \Rightarrow V_A\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) = \frac{V_S}{R1} + i_S$$

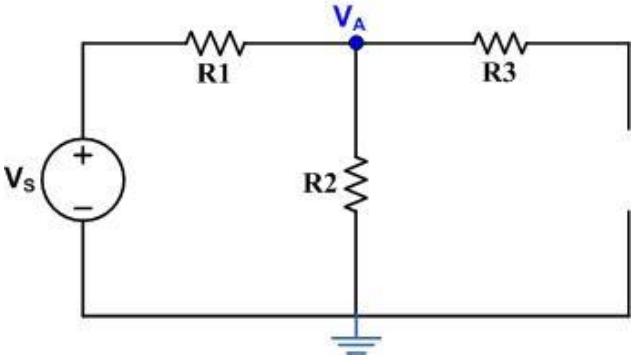
$$\Rightarrow V_A = \frac{\frac{V_S}{R1} + i_S}{\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right)}$$

ب) هنگامی که ولتاژ دو سر منبع ولتاژ، صفر باشد، همانند سیم است. پس به جای منبع ولتاژ، سیم می گذاریم و با روش ولتاژ گره، ولتاژ دو سر مقاومت R2 را حساب می کنیم.



$$\frac{0 - V_A}{R1} + \frac{0 - V_A}{R2} + i_S = 0 \Rightarrow -V_A\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) + i_S = 0 \Rightarrow V_A\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) = i_S \Rightarrow V_A = \frac{i_S}{\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right)}$$

ج) اگر منبع جریان، خاموش باشد و از آن جریانی عبور نکند، همانند مدار باز عمل می کند. پس مدار را به صورت زیر می کشیم و با استفاده از ولتاژ گره، ولتاژ دو سر مقاومت R2 را حساب می کنیم.



$$\frac{V_S - V_A}{R1} + \frac{0 - V_A}{R2} = 0 \Rightarrow \frac{V_S}{R1} - V_A\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) = 0 \Rightarrow V_A\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) = \frac{V_S}{R1} \Rightarrow V_A = \frac{\frac{V_S}{R1}}{\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right)}$$

در قسمت الف جمیع منابع مدار روشن هستند. در قسمت ب فقط منبع جریان روشن است و در قسمت ج فقط منبع ولتاژ روشن است. همان طوری که می بینید اگر ولتاژ دو سر مقاومت R2 در حالتهای ب و ج را با هم جمع کنیم برابر است با :

$$\frac{i_S}{\left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}\right)}+\frac{\frac{V_S}{R1}}{\left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}\right)}=\frac{i_S+\frac{V_S}{R1}}{\left(\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}\right)}$$

که با حالتی که همه منابع روشن هستند (قسمت الف) برابر است.

همان طوری که در مثال فوق دیدید، ولتاژ به وجود آمده در دو سر مقاومت R۲، برابر ولتاژی است که هر یک از منابع به تنهایی در دو سر آن عنصر ایجاد می کنند.

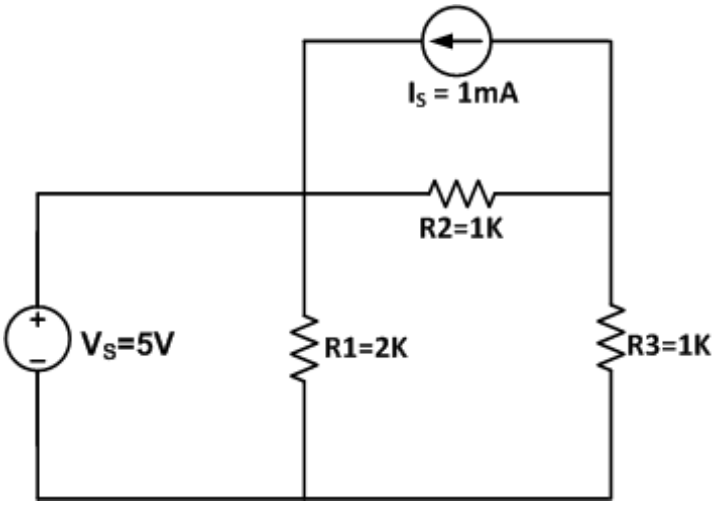
بنابراین برای تحلیل کردن مدارها با استفاده از جمع آثار می توانیم، یکی از منابع مدار را روشن بگذاریم و سایر منابع را خاموش کنیم و اثر آن منبع را در آن نقطه از مدار حساب کنیم. سپس منبع دیگری را روشن کنیم و اثرش را در آن نقطه از مدار حساب کنیم و این کار را برای همه منابع مدار تکرار کنیم. اثری که همه منابع در آن نقطه از مدار ایجاد می کنند برابر مجموع اثرهایی است که هر یک از منابع به تنهایی ایجاد می کنند.

توجه دارید که زمانی که منبع ولتاژ خاموش باشد، ولتاژ دو سر آن صفر ولت است که در حکم سیم عمل می کند و منبع جریانی که جریان گذرا از آن صفر باشد، جریان گذرا از آن صفر است و در حکم مدار باز عمل می کند. (شکل زیر)

به طور نمونه، مثال زیر را ببینید.

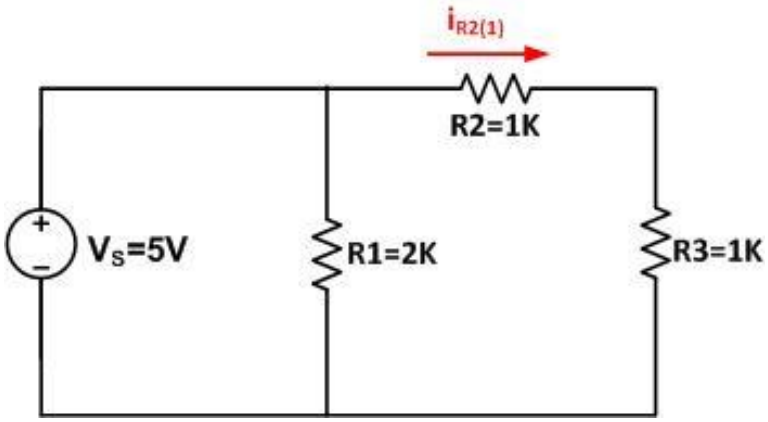
مثال ۳-۵: حل مدار با استفاده از جمع آثار

با استفاده از جمع آثار (برهم نهی) جریان گذرا از مقاومت R2 را حساب کنید.

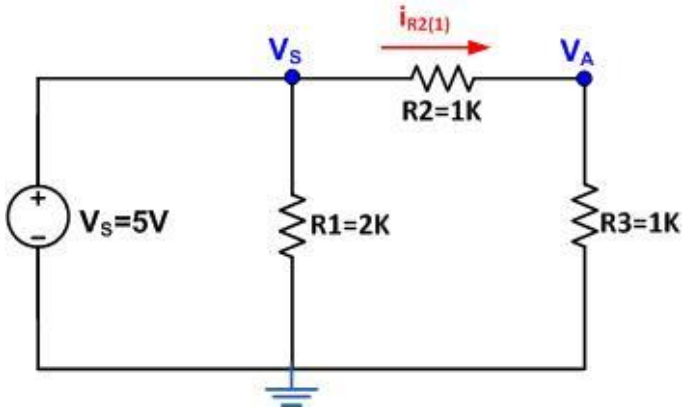


حل:

ابتدا منبع ولتاژ را روشن می کنیم و منبع جریان را خاموش می کنیم. شکل مدار به صورت زیر می شود:



برای به دست آوردن جریان گذرا از R2 می توانیم ولتاژ دو سر R2 را با استفاده از تقسیم ولتاژ یا ولتاژ گره به دست آوریم و سپس جریان را حساب کنیم. همچنین می توانیم برای مقاومت R2 و R3 معادل حساب کنیم و جریان گذرا از مقاومت معادل را حساب کنیم. ما روش ولتاژ گره را انتخاب می کنیم:

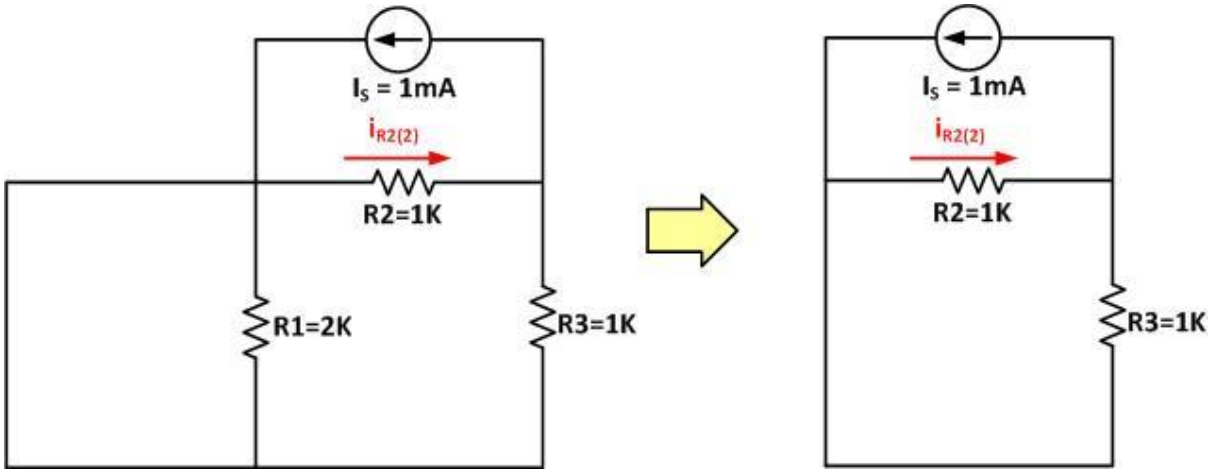


در این شکل تنها گره مجهول، گره A است. بنابراین معادل ولتاژ گره را برای آن می نویسیم:

$$\frac{V_S - V_A}{R2} + \frac{0 - V_A}{R3} = 0 \Rightarrow 5 = 2V_A \Rightarrow V_A = 2.5V \Rightarrow V_{R2} = V_S - V_A = 5 - 2.5 = 2.5V$$

$$\rightarrow i_{R2} = V_{R2} / R2 = 2.5/1K \rightarrow i_{R2(1)} = 2.5mA$$

سپس منبع جریان را روشن می کنیم و منبع ولتاژ را خاموش می کنیم. شکل مدار به صورت زیر می شود:



در شکل فوق، از آنجایی که مقاومت R1 با سیم موازی شده است، لذا جمیع جریان از سیم می گذرد و مقاومت R1 حذف می-شود.

با توجه به اینکه، مقاومتهای R2 و R3 با هم موازی شده اند، بنابراین جریان Is بین آنها تقسیم می شود و با استفاده از معادله تقسیم جریان در مدارهای موازی می توانیم بنویسیم:

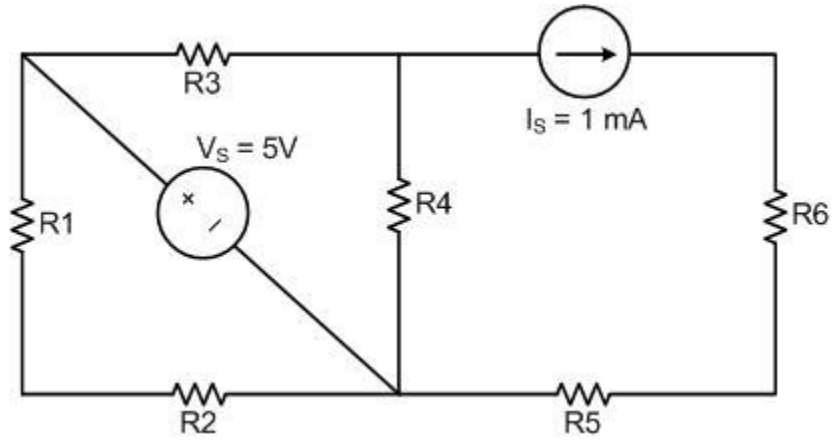
$$i_{R2} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \times i_S = \frac{1}{2} \times 1mA = 0.5mA \Rightarrow i_{R2(2)} = 0.5mA$$

حال با جمع زدن جریان گذرا از مقاومت R3، در دو حالت فوق، جریان گذرا از R2 در زمانی که هر دو منبع روشن باشند، بدست می آید:

$$i_{R2} = i_{R2(1)} + I_{R2(2)} = 2.5\ mA + 0.5mA = 3\ mA \rightarrow i_{R2} = 3\ mA$$

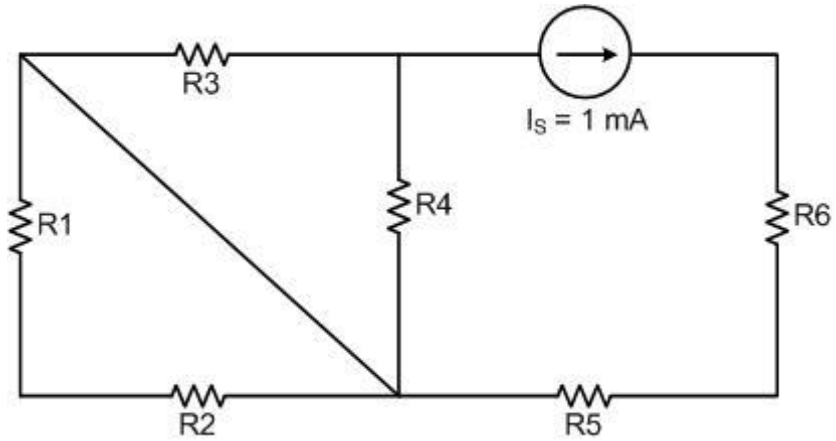
مثال ۳-۶: تحلیل مدار با استفاده از جمع آثار

در مدار زیر اگر مقدار جمیع مقاومتها 1K باشند، با استفاده از جمع آثار، ولتاژ دو سر مقاومت R4 را حساب کنید.

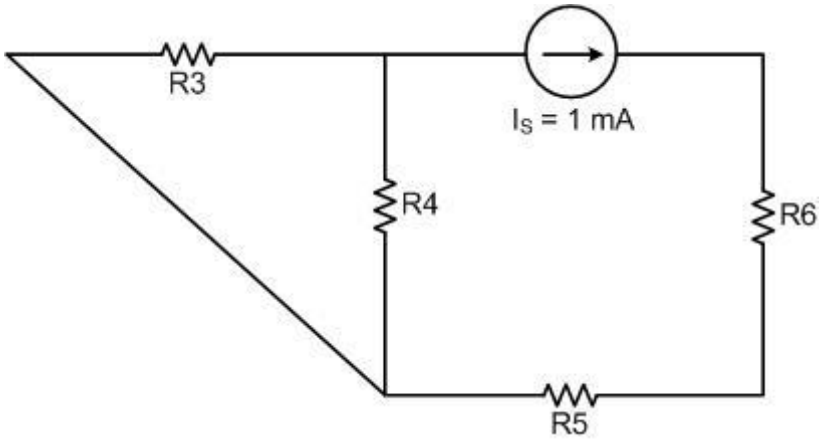


حل:

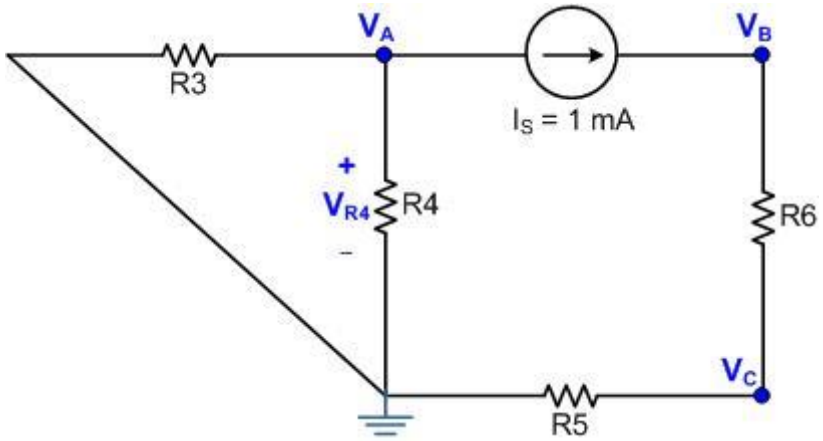
ابتدا منبع جریان را روشن می کنیم و منبع ولتاژ را خاموش می کنیم. بنابراین منبع ولتاژ با سیم جایگزین می شود:



با توجه به اینکه مقاومتهای R1 و R2 با سیم موازی شده اند، این مقاومتها حذف می‌شوند:



برای به دست آوردن ولتاژ دو سر R4 می توانیم از تقسیم جریان و یا روش ولتاژ گره استفاده کنیم که ما روش ولتاژ گره را انتخاب می کنیم:

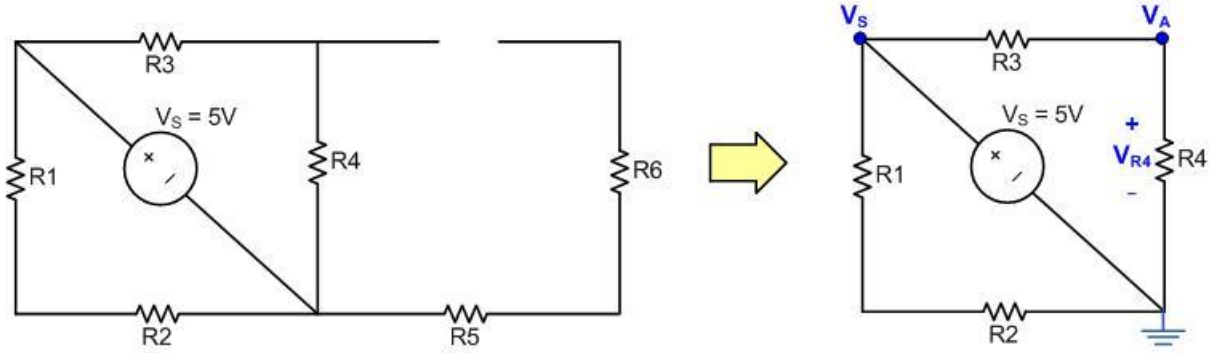


برای به دست آوردن ولتاژ دو سر R4، ما فقط به ولتاژ VA نیاز داریم. بنابراین معادله را برای آن می نویسیم:

$$\frac{0-V_A}{R3}+\frac{0-V_A}{R4}-I_S=0\Rightarrow\frac{-V_A}{1K}+\frac{-V_A}{1K}-I_S=0\Rightarrow-2V_A=1\Rightarrow V_A=-0.5V$$

$$V_{R4}=V_A-0=-0.5V\Rightarrow V_{R4(1)}=-0.5V$$

سپس منبع ولتاژ را روشن می کنیم و منبع جریان را خاموش می کنیم. با توجه به اینکه جریان گذرا از منبع جریان، صفر است بنابراین آن را با مدار باز جایگزین می کنیم:



برای به دست آوردن ولتاژ دو سر VR4 می توانیم از روش ولتاژ گره و یا تقسیم ولتاژ استفاده کنیم. ما روش ولتاژ گره را انتخاب می کنیم و برای گره A معادله ولتاژ گره را می نویسیم:

$$\frac{V_S - V_A}{R3} + \frac{0 - V_A}{R4} = 0 \Rightarrow \frac{5 - V_A}{1K} + \frac{-V_A}{1K} = 0 \Rightarrow 5 = 2V_A \Rightarrow V_A = 2.5V$$

$$V_{R4} = V_A - 0 = 2.5V \Rightarrow V_{R4(2)} = 2.5V$$

حال برای اینکه ولتاژ دو سر R4 در حالتی که هر دو منبع روشن هستند را بدست آوریم مقدار ولتاژ دو سر R4 را در دو حالت فوق با هم جمع می کنیم:

$$V_{R4} = V_{R4(1)} + V_{R4(2)} = -0.5V + 2.5V = 2V$$

از خصوصیت خطی بودن مدارهای مقاومتی به شکل دیگری نیز می توانیم استفاده کنیم و آن زمانی است که در مداری فقط یک منبع مستقل داریم. طبق خصوصیت اول جمع آثار، اگر مقدار x، k برابر شود، مقدار f(x) نیز k برابر می شود. بنابراین در مداری که فقط یک منبع مستقل وجود دارد و تعدادی مقاومت و منابع وابسته در آن هستند، اگر مقدار منبع k برابر شود، جریان و ولتاژ کلیه نقاط مدار نیز k برابر می شود. به طور نمونه، مثال زیر را ببینید.

مثال ۳-۷

یک مدار شلوغ مقاومتی را به یک باتری ۱٫۵ ولت متصل کرده ایم و ملاحظه کرده ایم که ولتاژ دو سر یکی از مقاومتها 0.1V شده است. اگر همین مدار را به ولتاژ ۱۲ ولت متصل کنیم دو سر آن مقاومت چند ولت می شود؟

حل:

ابتدا حساب میکنیم که ولتاژ منبع مستقل چند برابر شده است:

$$\frac{12V}{1.5V} = 8$$

بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت مورد نظر نیز می بایست ۸ برابر شود:

$$8 \times 0.1V = 0.8V$$

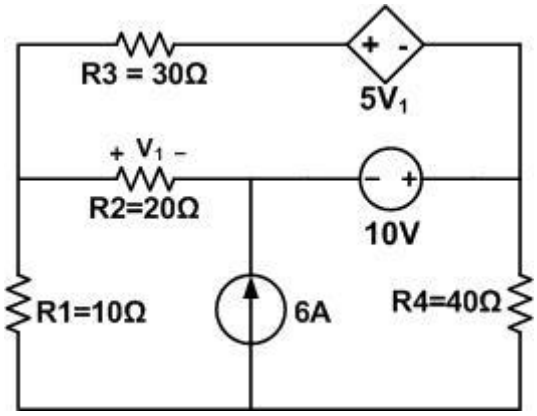
جمع آثار و منابع وابسته

منابع وابسته، ولتاژ و جریانی که ایجاد می کنند وابسته به منابع مستقلی است که در مدار وجود دارد و بسته به تاثیری که از هر یک از منابع مستقل دریافت می کنند، تاثیری را در مدار، اعمال می کنند. بنابراین هنگامی که می خواهیم از جمع آثار استفاده کنیم، همیشه منابع وابسته در مدار حضور دارند و هیچ گاه آنها را خاموش نمی کنیم.

در مثال زیر، منبع وابسته ای در مدار وجود دارد که با استفاده از جمع آثار به تحلیل مدار پرداخته ایم.

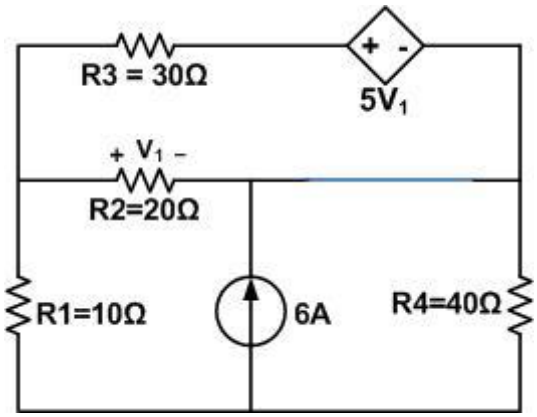
مثال ۳-۸

با استفاده از جمع آثار، جریان گذرا از R3 را بدست آورید

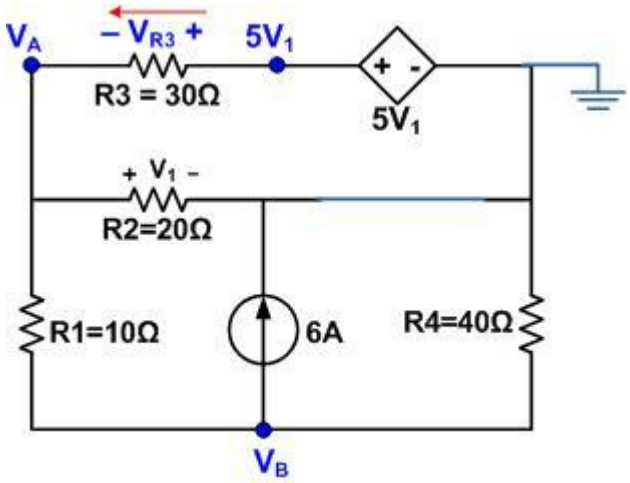


حل:

ابتدا منبع جریان را روشن می گذاریم و منبع ولتاژ مستقل را خاموش می کنیم:



برای به دست آوردن جریان گذرا از R3، روش ولتاژ گره را انتخاب می کنیم و نقطه ای را به عنوان زمین انتخاب می کنیم که بیشترین تعداد منبع ولتاژ و شاخه به آن متصل باشد:



در گره A داریم:

$$\frac{V_B - V_A}{R1} + \frac{0 - V_A}{R2} + \frac{5V_1 - V_A}{R3} = 0$$

بر حسب شکل می بینیم که مقدار V_1 برابر است با V_A پس مقدار V1 را در معادله بالا می گذاریم:

$$\frac{V_B - V_A}{10} + \frac{0 - V_A}{20} + \frac{5V_A - V_A}{30} = 0 \overset{\times 60}{\Longrightarrow} 6V_B - 6V_A - 3V_A + 8V_A = 0 \Rightarrow 6V_B - V_A = 0$$

در گره B داریم:

$$\frac{V_A - V_B}{R1} - 6 + \frac{0 - V_B}{R4} = 0 \Rightarrow \frac{V_A - V_B}{10} - 6 + \frac{0 - V_B}{40} = 0 \overset{\times 40}{\Longrightarrow} 4V_A - 4V_B - 240 - V_B = 0$$

$$\Rightarrow 4V_A - 5V_B = 240$$

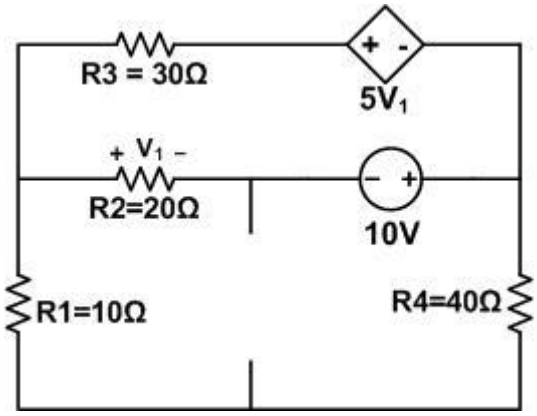
حال مقدار V_B را از معادله اول در معادله دوم جایگزین می کنیم:

$$4V_A - 5V_B = 240 \Rightarrow 4V_A - \frac{5V_A}{6} = 240 \Rightarrow \frac{19V_A}{6} = 240 \Rightarrow V_A \approx 75.789$$

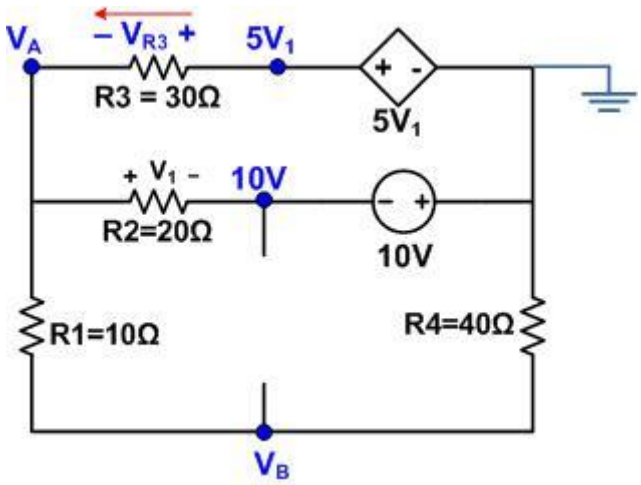
بنابراین مقدار جریان گذرا از مقاومت *R4* برابر است با:

$$i_{R4} = \frac{5V_A - V_A}{R4} = \frac{4V_A}{R4} \approx 7.579$$

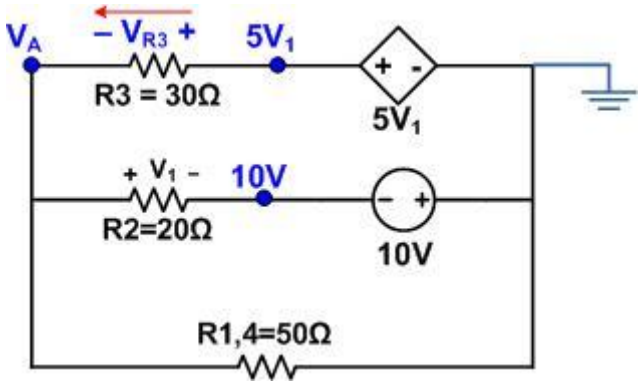
سپس منبع ولتاژ را روشن می کنیم و منبع جریان را خاموش می کنیم:



برای به دست آوردن جریان گذرا از R3، روش ولتاژ گره را انتخاب می کنیم:



با توجه به اینکه *R1* و *R4* سری هستند، آنها را با مقاومت *R1,4* که برابر با مجموع آنهاست جایگزین می کنیم:



و سپس معادله ولتاژ گره را برای گره A می نویسیم:

$$\frac{5V_1 - V_A}{R3} + \frac{10 - V_A}{R2} + \frac{0 - V_A}{R14} = 0$$

در این مدار، مقدار V_1 برابر است با:

$$V_1 = V_A - 10$$

بنابراین مقدار V_1 را در معادله ولتاژ گره جایگزین می کنیم:

$$\frac{5(V_A - 10) - V_A}{30} + \frac{10 - V_A}{20} + \frac{0 - V_A}{50} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 300} 50(V_A - 10) - 10V_A + 150 - 15V_A - 6V_A = 0$$

$$\Rightarrow 19V_A + 100 = 0 \Rightarrow V_A = -5.263$$

مقدار جریان گذرا از مقاومت R3 برابر است با:

$$i_{R4} = \frac{5V_1 - V_A}{R4} = \frac{5(V_A - 10) - V_A}{R4} = \frac{4V_A - 10}{40} \approx -0.756A$$

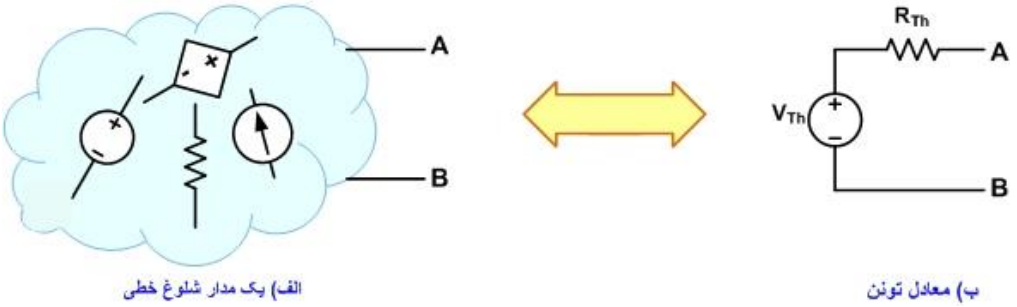
برای اینکه جریان گذرا از R3، زمانی که همه منابع روشن هستند، را به دست آوریم جوابها را با هم جمع می کنیم:

$$i_{R4} = 7.579 - 0.756 = 6.823A$$

بخش ۳-۲: معادل تونن (Thevenin) و نورتن (Norton)

بخش ۳-۲-۱: معادل تونن

اگر ما مدار خطی دلخواهی داشته باشیم، که در آن از هر تعداد مقاومت و منابع مستقل و وابسته استفاده شده باشد و از دو نقطه دلخواه از این مدار دو سیم بیرون کشیده باشیم؛ تئوری تونن بیان می کند که کل این مدار را می توانیم با یک منبع ولتاژ مستقل که با یک مقاومت سری شده باشد، جایگزین کنیم به گونه ای که از دید آن دو سر سیم، رفتار این مدار معادل (این منبع ولتاژ و مقاومت) درست همانند رفتار آن مدار اصلی (همان مدار خطی که از اول داشتیم) باشد. به این مدار معادل، اصطلاحاً معادل تونن گفته می شود.



شکل ۳- ۴: معادل تونن

به مقدار ولتاژ منبع ولتاژ در مدار معادل تونن، اصطلاحا ولتاژ تونن می گویند که با V_{Th} نمایش داده می شود. مقاومت موجود در مدار معادل تونن، نیز مقاومت تونن نامیده می شود که با R_{Th} نمایش می دهیم. در زیر می بینیم که هرگاه بخواهیم برای مداری، معادل تونن را به دست آوریم، چگونه مقادیر V_{Th} و R_{Th} را حساب کنیم.

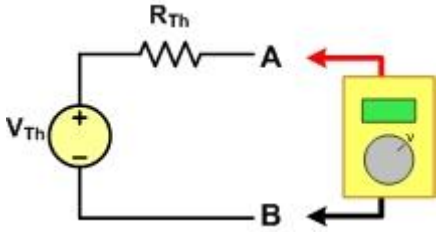
محاسبه مقادیر V_{Th} و R_{Th}

محاسبه V_{Th}

در مدار معادل تونن، هنگامی که دو سر خروجی مدار آزاد هستند، اگر با ولت متر، ولتاژ دو سیم خروجی را اندازه بگیریم، با توجه به اینکه از مقاومت R_{Th} جریانی نمی گذرد، هیچ افت ولتاژی بر روی R_{Th} اتفاق نمی افتد. بنابراین ولتاژی که ولت متر نشان می دهد، همان ولتاژ دو سر منبع ولتاژ (V_{Th}) است.

با توجه به اینکه این مدار معادل تونن انتظار می رود که معادل مدار اصلی رفتار کند، بنابراین در مدار معادل تونن و مدار اصلی می بایست ولتاژ دو سر خروجی مدار در حالتی که هیچ عنصری به آن وصل نیست، مقادیر یکسانی باشد.

بنابراین برای به دست آوردن V_{Th} در مدار اصلی کافی است که ولتاژ دو سر خروجی مدار را زمانی که آزاد است (چیزی به آن وصل نیست) اندازه بگیریم.

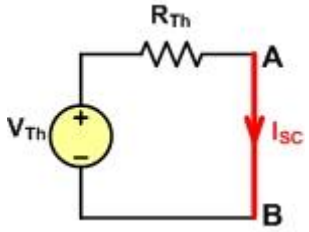


شکل ۳-۵: اندازه گیری ولتاژ مدار باز

محاسبه R_{Th}

در معادل تونن اگر با سیم دو سر خروجی را به هم وصل کنیم (خروجی را اتصال کوتاه کنیم) جریانی در سیم اتصال کوتاه کننده برقرار می شود. اگر مقدار این جریان را با آمپرمتر اندازه بگیریم و اسم این جریان را I_{SC} (جریان اتصال کوتاه (short circuit) بنامیم، با استفاده از I_{SC} می توانیم به صورت زیر مقدار مقاومت R_{Th} را به دست آوریم.

$$V_{Th} - i_{SC}R_{Th} = ۰ \rightarrow R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{SC}}$$



شکل ۳-۶: جریان اتصال کوتاه

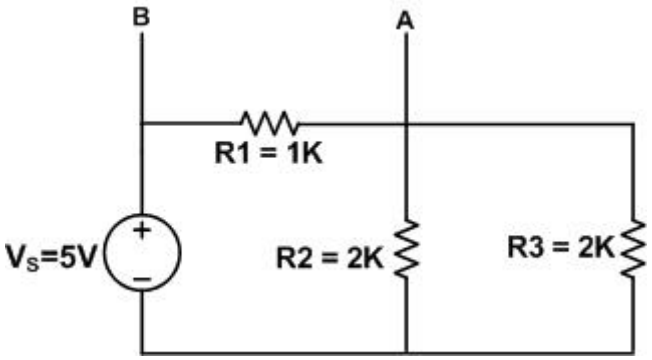
با توجه به اینکه مدار معادل تونن و مدار اصلی می بایست درست مثل هم رفتار کنند، بنابراین مقدار جریان اتصال کوتاه (I_{SC}) در مدار اصلی و مدار معادل تونن می بایست یکسان باشند.

بنابراین برای به دست آوردن مقاومت تونن برای یک مدار کافیست که دو سر خروجی آن را اتصال کوتاه کنیم و جریان اتصال کوتاه را اندازه بگیریم. مقدار مقاومت تونن برابر است با:

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{SC}}$$

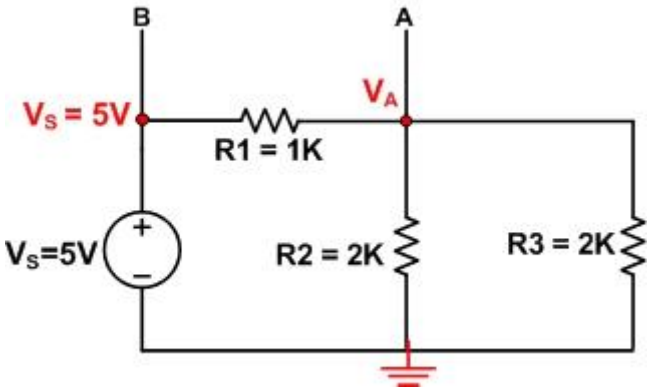
مثال ۳-۹

معادل تونن مدار زیر را از دید دو سر AB به دست آورید.



پاسخ:

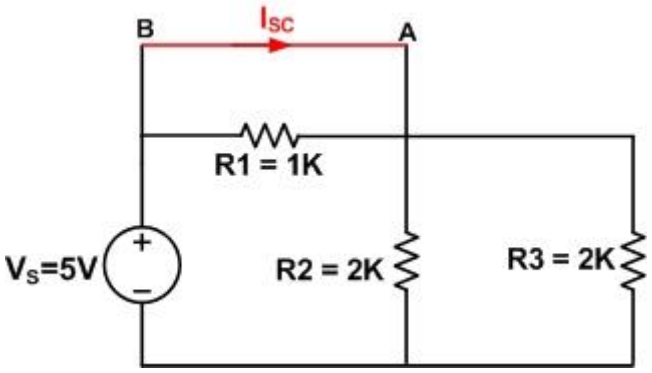
برای اینکه ولتاژ تونن را به دست آوریم، ولتاژ مدار باز دو سر AB را حساب می کنیم. اگر سر پایینی منبع ولتاژ را زمین در نظر بگیریم، ولتاژ گره B برابر ۵ ولت می شود و فقط کافیست که ولتاژ گره A را حساب کنیم تا ولتاژ تونن به دست آید.

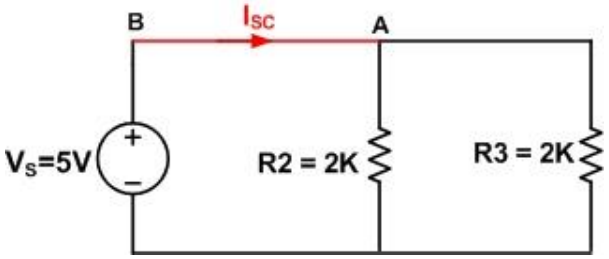


$$\frac{5-V_A}{R_1}+\frac{0-V_A}{R_2}+\frac{0-V_A}{R_3}=0 \Rightarrow \frac{5-V_A}{1K}+\frac{0-V_A}{2K}+\frac{0-V_A}{2K}=0 \Rightarrow V_A=2.5V$$

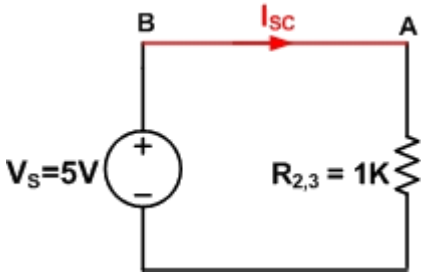
$V_{OC} = V_B - V_A = 5 - 2.5 = 2.5V$ ➔ $V_{Th} = 2.5V$

سپس برای اینکه مقاومت تونن را به دست آوریم، جریان اتصال کوتاه را اندازه می گیریم.





با توجه به اینکه مقاومت R_1 اتصال کوتاه شده است (در موازات اتصال کوتاه قرار گرفته) بنابراین از آن جریانی نمی گذرد (جریان گذرا از مقاومت برابر است با ولتاژ دو سر آن بخش بر مقاومت و چون دو سر مقاومت R_1 به هم اتصال کوتاه شده، پس اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1، صفر ولت است و بنابراین جریان گذرا از مقاومت R_1 نیز صفر است) بنابراین جمیع جریان از اتصال کوتاه می گذرد و می توانیم مقاومت R_1 را حذف کنیم.



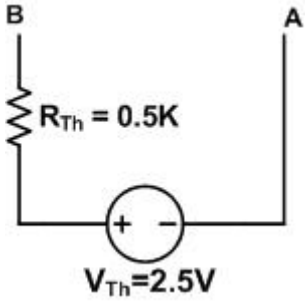
برای اینکه I_{SC} را در این مدار حساب کنیم، می توانیم مقاومت معادل R_2 و R_3 را حساب کنیم و جریان گذرا از آن را به دست آوریم.

$$R_{2,3} = R2||R3 = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2K \times 2K}{2K + 2K} = 1K$$

Using KVL: $+5 - I_{SC}R_{2,3} = 0$ ➔ $I_{SC} = 5/1K = 5\ mA$

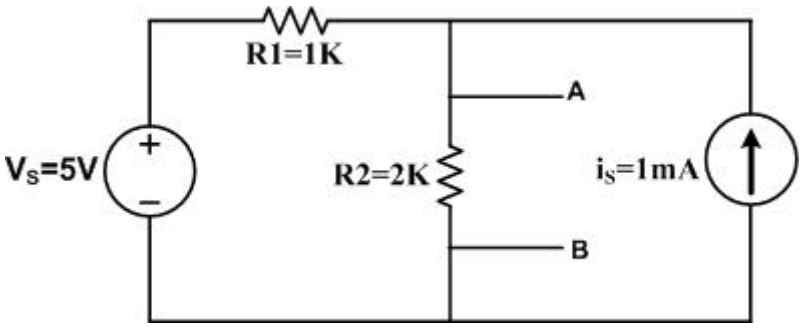
$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{sc}} = \frac{2.5}{5mA} = 0.5K$$

بنابراین معادل تونن برای مدار فوق به شکل زیر می شود:



مثال ۳-۱۰

در مدار زیر از دو سر مقاومت R2، دو رشته سیم بیرون کشیده شده. معادل تونن را از دید این دو سر، حساب کنید.



پاسخ:

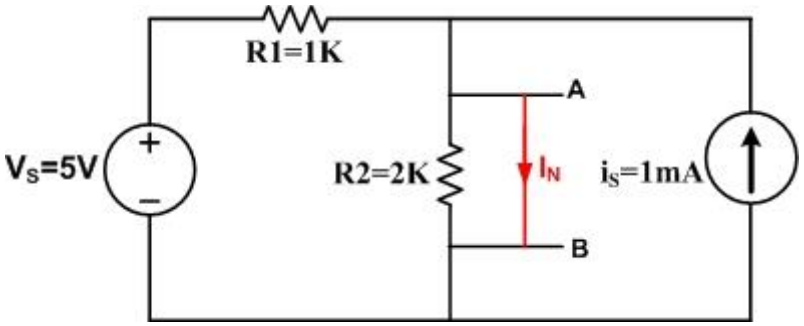
برای اینکه ولتاژ تونن را حساب کنیم کافیست که اختلاف پتانسیل دو سر AB را اندازه بگیریم. برای این منظور، می توانیم گره B را زمین فرض کنیم و با استفاده از روش ولتاژ گره، ولتاژ را در گره A محاسبه کنیم.

$$\frac{5-V_A}{R_1}+\frac{0-V_A}{R_2}+i_S=0\Rightarrow\frac{5-V_A}{1K}+\frac{0-V_A}{2K}+1mA=0\Rightarrow 10-3V_A+2=0\Rightarrow V_A=4V$$

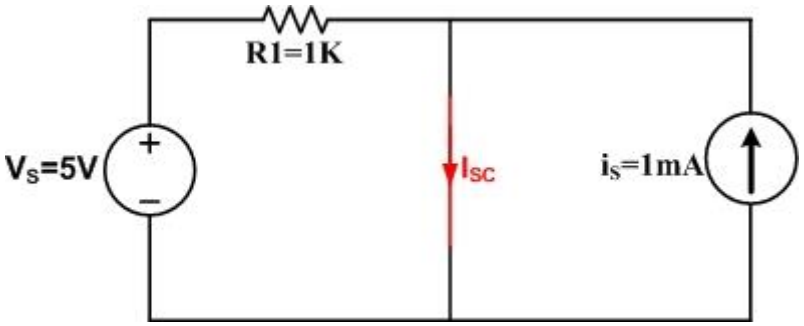
بنابراین ولتاژ تونن برابر است با:

$V_{Th} = V_A - V_B = 4 - 0 = 4V$

سپس برای اینکه مقاومت تونن را حساب کنیم، جریان اتصال کوتاه را حساب می کنیم:



با توجه به اینکه دو سر مقاومت R2، اتصال کوتاه شده است، بنابراین همه جریان از اتصال کوتاه می گذرد و مقاومت R2 حذف می شود.



برای اینکه جریان اتصال کوتاه (I_{SC}) را به دست آوریم، می توانیم رابطه KCL را برای گره مدار بنویسیم:

$I_1+i_S = I_{SC}$

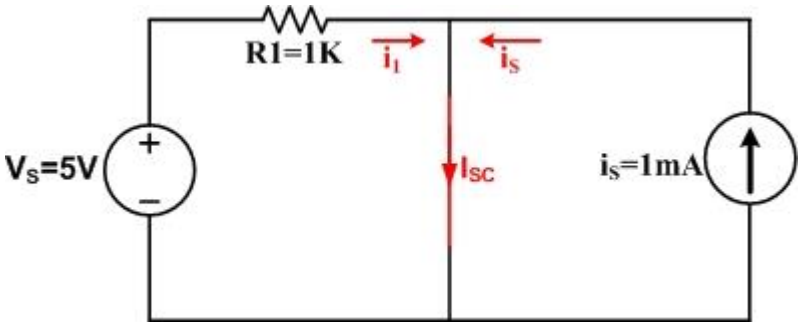
جریان i_1 با جریان گذرا از مقاومت R_1 برابر است. پس می توانیم بنویسیم:

$I_1 = \frac{V_S-0}{R1} = 5mA$

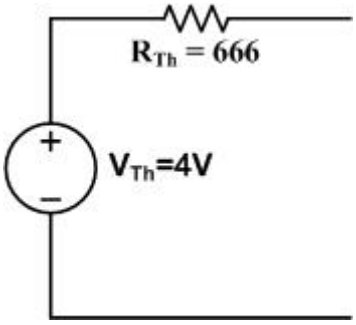
$I_{SC} = I_1 + I_S = 5mA + 1mA = 6mA$

$R_{Th} = V_{Th}/I_{SC} = 4V/6mA = 0.666K$

$\rightarrow R_{Th} = 666$



بنابراین معادل تونن برای مدار فوق به صورت زیر است:

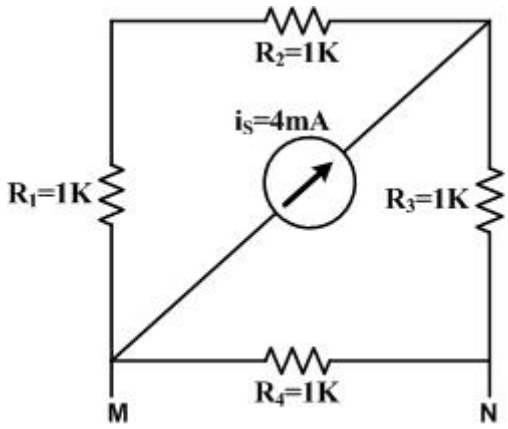


محاسبه مقاومت تونن در مدارهایی که منابع وابسته در آنها وجود ندارد

در مدارهایی که می خواهیم برایشان معادل تونن به دست آوریم، اگر منابع وابسته وجود نداشته باشد، راه حل دیگری نیز برای به دست آوردن مقاومت تونن داریم. می توانیم کلیه منابع موجود در مدار را خاموش کنیم (همان طوری که می دانید اگر منبع ولتاژ خاموش شود، از آنجایی که اختلاف پتانسیل آن صفر می شود، معادل سیم می شود و منبع جریانی که خاموش شود، معادل مدار باز می شود.) سپس مقاومت معادل مدار را از دید دو سَری که می خواهیم برایش معادل تونن حساب کنیم، به دست می آوریم. مقاومت به دست آمده همان مقاومت تونن است.

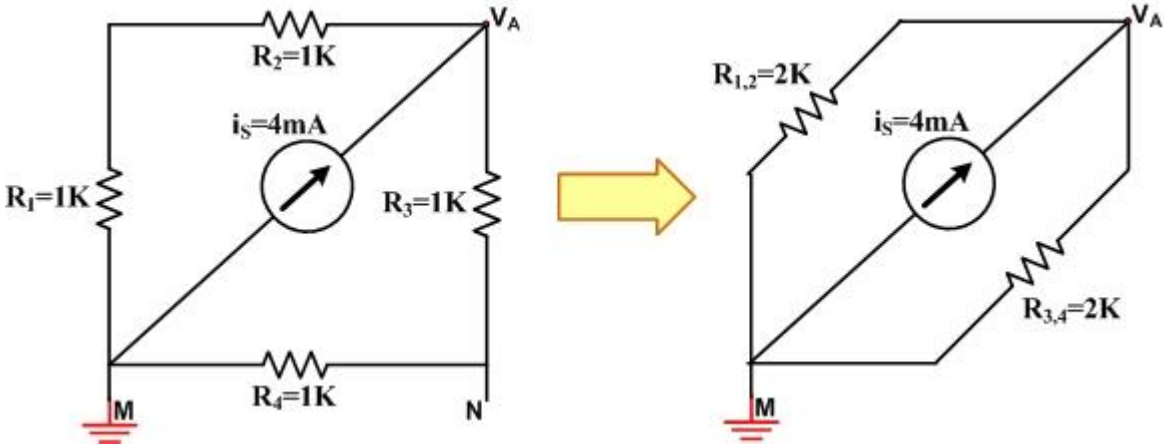
توجه دارید که در مدار معادل تونن نیز اگر منبع ولتاژ خاموش شود، مقاومت دو سر خروجی همان R_{Th} می شود.

مثال ۳-۱۱: در مدار زیر معادل تونن را از دید دو سر M و N به دست آورید.



پاسخ:

برای بدست آوردن ولتاژ تونن، ولتاژ دو سر MN را به دست می آوریم. برای این منظور سر M را زمین فرض می کنیم و ولتاژ سر N را نسبت به آن به دست می آوریم. با توجه به اینکه R3 و R4 سری هستند، برای به دست آوردن ولتاژ گره N، ابتدا ولتاژ گره A را به دست می آوریم و سپس از رابطه تقسیم ولتاژ، ولتاژ گره N را به دست می آوریم.

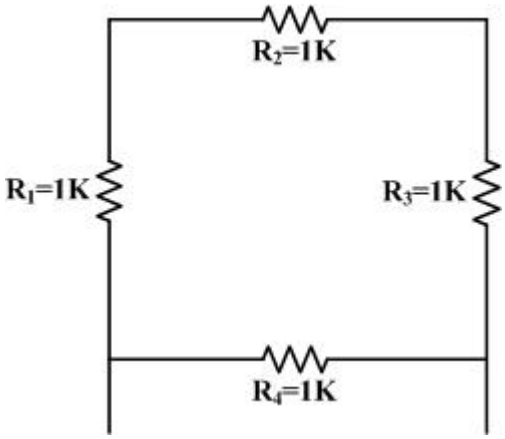


برای گره A داریم:

$$\frac{0-V_A}{R_{1,2}} + i_S + \frac{0-V_A}{R_{3,4}} = 0 \Rightarrow V_A = 4V$$

$$V_N = \frac{R_4}{R_4+R_3} \times V_A = \frac{V_A}{2} = 2V$$

$$V_{Th} = V_N - V_M = 2V$$



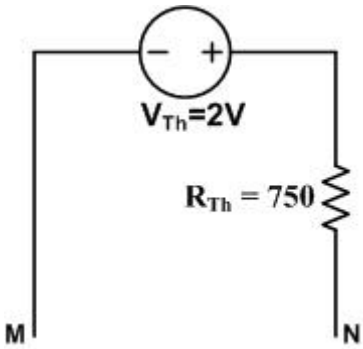
با توجه به اینکه در مدار منبع وابسته ای وجود ندارد، برای به دست آوردن مقاومت تونن، می توانیم منابع مدار را خاموش کنیم و مقاومت دو سر خروجی را اندازه بگیریم. اگر منبع جریان خاموش شود، جریان گذرا از آن صفر می شود و در حکم مدار باز عمل می کند. بنابراین زمانی که منبع جریان خاموش شود، مدار به صورت زیر می شود.

در این مدار، مقاومتهای R_1 و R_2 و R_3 با هم سری هستند و بنابراین مقاومت معادل آنها برابر است با:

$R_{1,2,3} = R1+R2+R3 = 1K+1K+1K=3K$

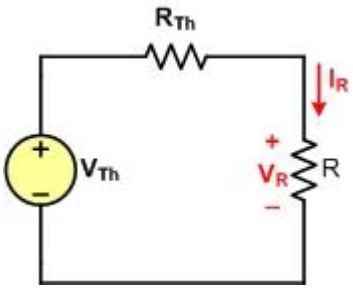
$R_{1,2,3,4} = \frac{R_{1,2,3} \times R_4}{R_{1,2,3}+R_4} = \frac{3K \times 1K}{4K} = 0.75K = 750$ ➔ $R_{Th} = 750$

بنابراین مدار معادل تونن به صورت زیر می شود:



محاسبه معادل تونن در واقعیت

به طور تئوری گفتیم که برای به دست آوردن مقاومت معادل تونن، دو سر مدار را اتصال کوتاه می کنیم و جریان اتصال کوتاه را اندازه می گیریم. اما در واقعیت ما اگر دو سر خروجی مداری را با سیم به هم متصل کنیم، ممکن است که به مدار آسیب برسانیم. به طور مثال اگر بخواهیم معادل تونن را برای پریز برق شهر حساب کنیم، نمی توانیم دو سر پریز را با سیم به هم وصل کنیم. زیرا یا فیوز می پرد یا کل سیم های ساختمان خواهد سوخت!

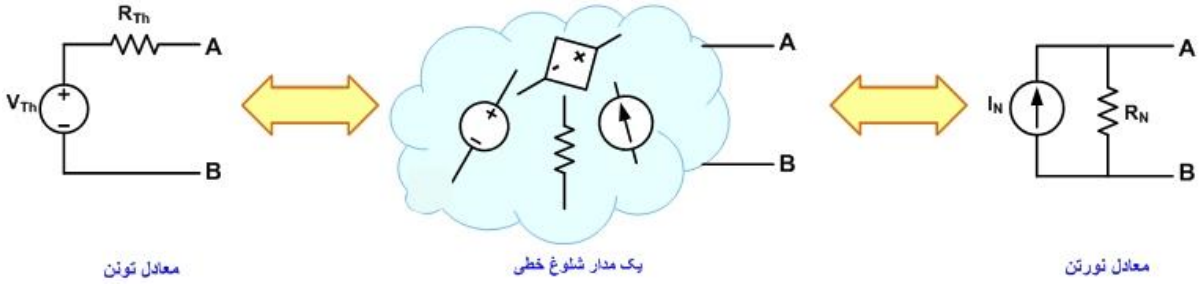


پس راه حل چیست؟ در این موارد می توانیم مقاومت دلخواهی را به سر خروجی مدار متصل کنیم و جریان گذرا از مقاومت و ولتاژ دو سر مقاومت را اندازه بگیریم. اگر فرض کنیم که ولتاژ دو سر مقاومت V_R و جریان گذرا از آن I_R باشد، به صورت زیر می توانیم معادل تونن را برای مدار حساب کنیم. در محاسبات زیر، در نظر داشته باشید که جریان I_R از درون R_{Th} و سایر اجزای مدار نیز می گذرد.

$$V_{Th} - I_R R_{Th} - V_R = 0 \rightarrow R_{Th} = \frac{V_{Th} - V_R}{I_R}$$

بخش ۳-۲-۲: معادل نورتن

جلوتر دیدیم که اگر از دو نقطه از یک مدار خطی دو سیم بیرون کشیده شده باشد، می توانیم آن را با یک منبع ولتاژ که با مقاومتی سری شده باشد، جایگزین کنیم به گونه ای که از دید کسی که به دو سر خروجی مدار نگاه می کند هیچ تفاوتی در رفتار این مدار جدید وجود نداشته باشد که آن مدار را معادل تونن نامیدیم. در این قسمت می بینیم که می توانیم مدار خطی را با یک منبع جریان که با مقاومتی موازی شده، معادل سازی کنیم که به این مدار، معادل نورتن می گوییم. شکل زیر را ببینید.

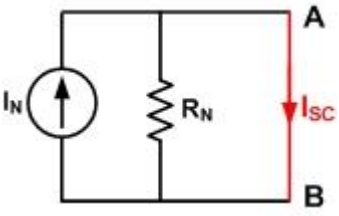


به مقدار جریان منبع، در مدار معادل نورتن، اصطلاحا جریان نورتن می گویند که با I_N نمایش داده می شود. همچنین به مقاومت موجود در مدار معادل نورتن، مقاومت نورتن می گویند که با R_N نمایش می دهیم. در زیر طریقه محاسبه I_N و R_N را توضیح می دهیم.

به دست آوردن معادل نورتن

محاسبه I_N

اگر در مدار معادل نورتن، دو سر خروجی را اتصال کوتاه کنیم، کل جریان منبع جریان از این اتصال کوتاه عبور میکند. (به عبارت دیگر، جریان گذرا از R_N برابر با ولتاژ دو سر R_N بخش بر مقاومت R_N است و از آنجایی که دو سر مقاومت R_N اتصال کوتاه شده پس ولتاژ دو سر آن، صفر است و جریان گذرا از آن نیز صفر است و بنابراین کل



جریان I_N، از اتصال کوتاه می گذرد.) بنابراین جریان اتصال کوتاه با جریان نورتن برابر می شود. شکل روبرو را ببینید.

از طرفی رفتار مدار معادل نورتن می بایست درست همانند رفتار مدار اصلی باشد. بنابراین برای به دست آوردن I_N کافیست که دو سر مدار را اتصال کوتاه کنیم. جریان اتصال کوتاه، همان جریان نورتن است.

محاسبه R_N

اگر ولتاژ دو سر خروجی مدار نورتن را زمانی که آزاد هستند، اندازه بگیریم و اسم آن را V_{OC} (ولتاژ مدار باز: open circuit) بنامیم، به صورت زیر می توانیم R_N را حساب کنیم:

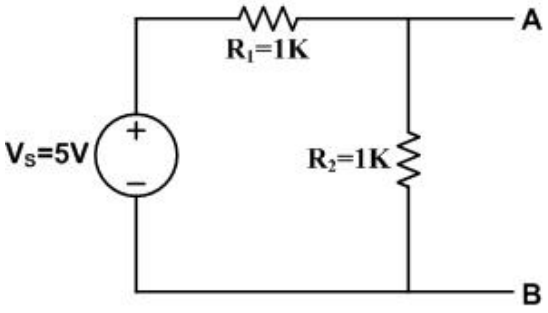
با توجه به اینکه دو سر خروجی آزاد است، پس کل جریان I_N از داخل مقاومت R_N عبور می کند. بنابراین

$$I_N R_N = V_{OC} \rightarrow R_N = \frac{V_{OC}}{I_N}$$

برای به دست آوردن I_N در مدار اصلی، ولتاژ مدار باز مدار را حساب می کنیم و بخش بر جریان اتصال کوتاه می کنیم ($R_N = \frac{V_{OC}}{I_N}$).

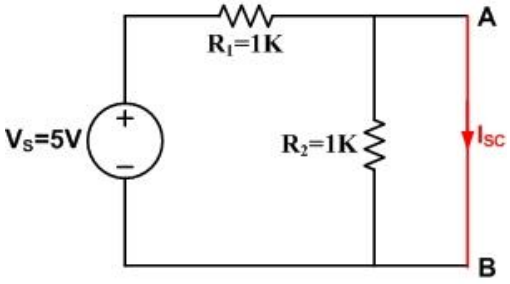
البته در مواردی که منابع وابسته در مدار وجود نداشته باشند، می توانیم برای به دست آوردن مقاومت نورتن، جمیع منابع را خاموش کنیم و مقاومت کل را محاسبه کنیم. به عبارت دیگر، محاسبه کردن مقاومت نورتن درست همانند به دست آوردن مقاومت تونن است.

مثال ۳-۱۲: در مدار زیر معادل نورتن را از دید دو سر A و B حساب کنید.



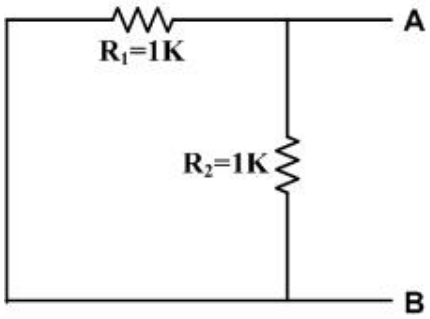
پاسخ:

برای اینکه جریان نورتن را حساب کنیم، دو سر خروجی را با سیم به هم متصل می کنیم و جریان گذرا از سیم (جریان اتصال کوتاه) را محاسبه می کنیم:



در مدار روبرو، با توجه به اینکه دو سر مقاومت R2 با سیم اتصال کوتاه شده بنابراین جریانی از مقاومت R2 نمیگذرد و همه جریان از اتصال کوتاه عبور می کند. اگر برای مدار، معادله KVL را بنویسیم داریم:

$+5 - I_{SC}R_1 = 0 \rightarrow I_{SC} = 5 / 1K = 5mA$

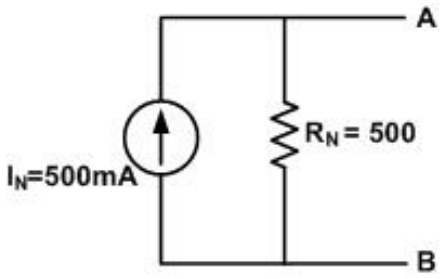


با توجه به اینکه در مدار، منبع وابسته ای وجود ندارد، برای به دست آوردن مقاومت نورتن می توانیم منابع مدار را خاموش کنیم و سپس مقاومت معادل مدار را حساب کنیم:

$R_T = R_{1,2} = R_1||R_2 = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = 0.5K = 500$

➔ $R_{Th} = R_T = 500$

بنابراین معادل نورتن مدار به صورت زیر است:



متناظر بودن معادل تونن و نورتن

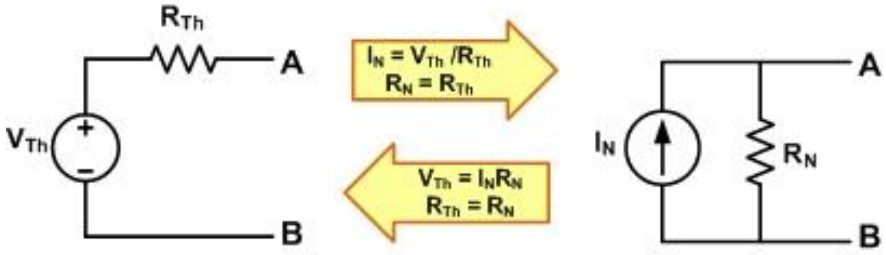
همان طوری که در فوق دیدیم برای بدست آوردن معادل تونن و معادل نورتن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه را حساب می کنیم که در معادل تونن:

$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{SC}}$; $V_{Th} = V_{OC}$

و در معادل نورتن

$R_N = \frac{V_{Th}}{i_{SC}}$; $I_N = I_{SC}$

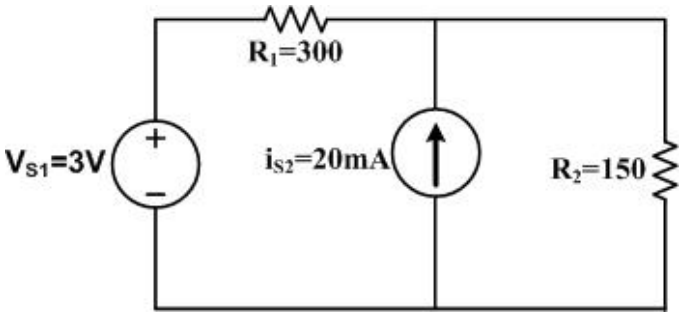
به عبارت دیگر، معادل تونن و نورتن به سهولت قابل تبدیل به یکدیگر هستند. زیرا مقاومت تونن و مقاومت نورتن با هم برابر هستند و از ضرب کردن I_N در R_N مقدار ولتاژ تونن حاصل می شود. شکل زیر را ببینید.



شکل ۳- ۷: تبدیل منبع جریان و منبع ولتاژ به یکدیگر

در کل هر کجا مایل باشیم، می توانیم به جای منبع ولتاژی که با مقاومتی سری است، یک منبع جریان که با مقاومتی موازی است بگذاریم و برعکس.

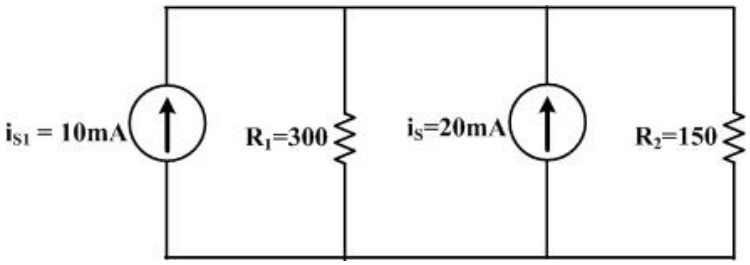
مثال ۳-۱۳: مدار زیر را با استفاده از تبدیل منابع ولتاژ و جریان ساده کنید.



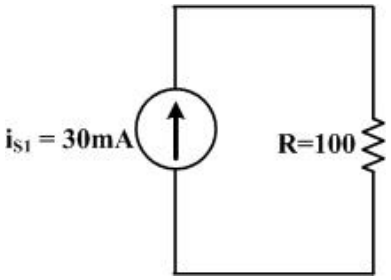
پاسخ:

در این مدار می توانیم منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کنیم و یا منبع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل کنیم. اگر منبع ولتاژ و مقاومت R1 را به منبع جریانی که با مقاومتی موازی است تبدیل کنیم، مقدار منبع جریانی که می بایست جایگزین کنیم برابر است با:

$I_{S1} = V_{S1} /R1 = 3/300 = 0.01A=10mA$



اکنون دو منبع جریان در موازات هم قرار گرفته اند که می توانیم آنها را در هم ادغام کنیم. همچنین مقاومتهای R1 و R2 نیز با هم موازی شده اند که آنها را نیز می توانیم در هم ادغام کنیم:



$i_{S1} + I_{S2} = 10mA + 20mA = 30mA$

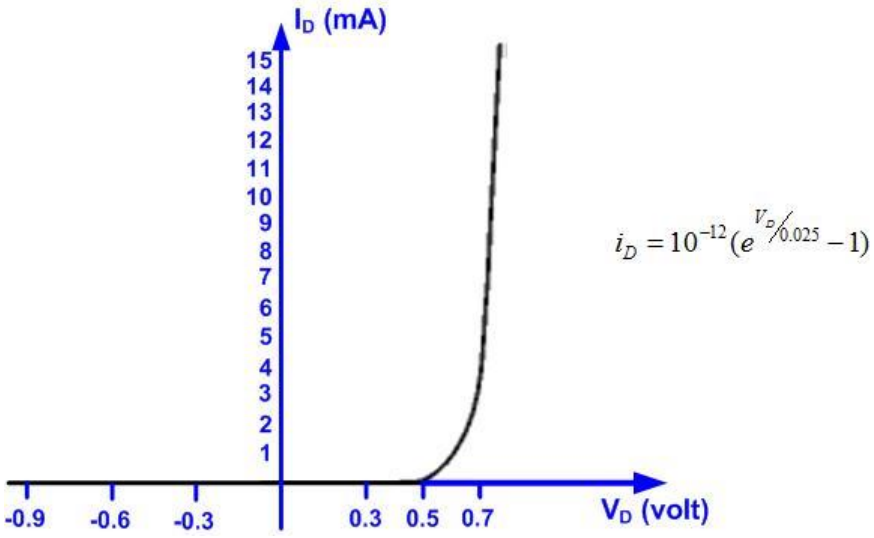
$R_{1,2} = R_1||R_2= \frac{300\times150}{300+150} = 100$

فصل چهارم: تحلیل مدارهای غیر خطی

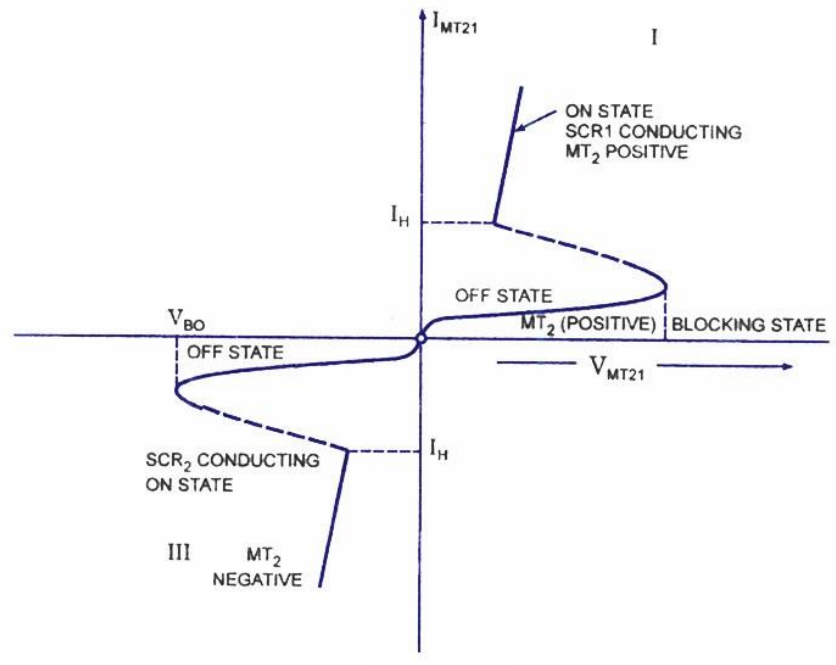
"Everything should be made as simple as possible, but not simpler." Albert Einstein

مقدمه ای بر مدارهای غیر خطی

در بخشهای قبلی با تحلیل عناصر خطی، مثل مقاومت ایده آل، آشنا شدیم. در عمل بسیاری از عناصر رفتاری غیر خطی دارند و رابطه بین جریان و ولتاژ آنها به شکل منحنی است. در این فصل روشهای تحلیل عناصر غیر خطی را بررسی می کنیم و از آنها برای تحلیل دیود بهره می گیریم. در زیر شکل نمودار چندین عنصر غیر خطی و معادله آنها را می بینید.



شکل ۴-۱: نمودار جریان به ولتاژ در دیود



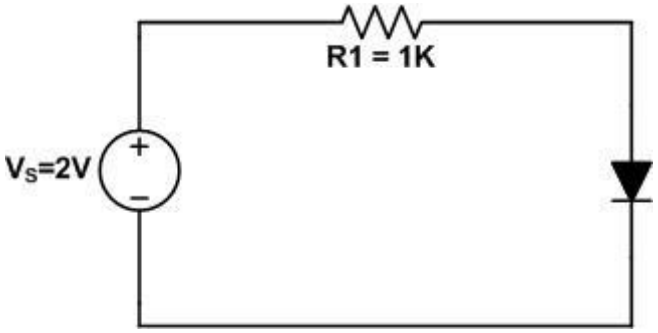
شکل ۴-۲: نمودار جریان به ولتاژ در دیاک (کپی شده از سایت http://www.circuitstoday.com)

در زیر با روشهای مختلفی جهت تحلیل عناصر غیر خطی آشنا می شویم.

روشهای تحلیل مدارهایی با عناصر غیرخطی

نوشتن معادلات ریاضی (Analytical Method)

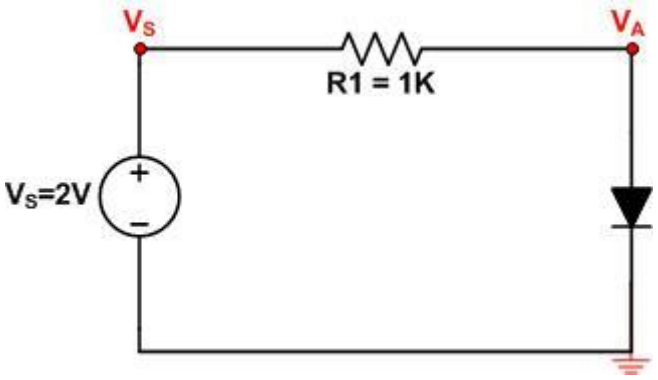
فرض کنید که مداری به شکل زیر داشته باشیم و بخواهیم ولتاژ دو سر مقاومت را محاسبه کنیم.



شکل ۴-۳

قوانین کیرشهف در جمیع مدارها حاکم است و روشهای ولتاژ گره و مش که مبتنی بر قوانین کیرشهف هستند نیز در جمیع مدارها صدق می کنند. پس می توانیم با استفاده از روش ولتاژ گره، به صورت زیر عمل کنیم:

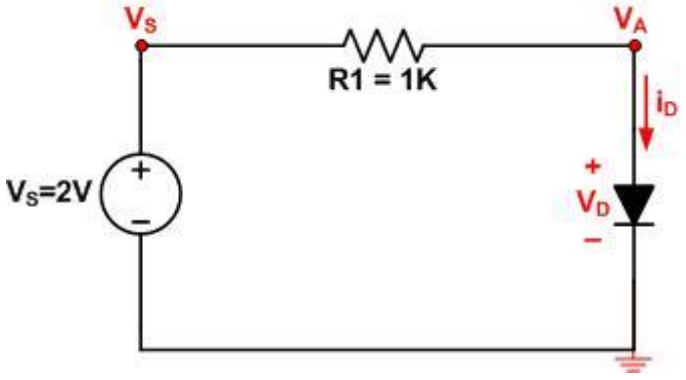
۱. نقطه ای از مدار را به عنوان زمین انتخاب می کنیم.
۲. گره های مدار را نامگذاری می کنیم. گره V_S دارای ولتاژ ۲ ولت است و تنها گره مجهولِ مدار V_A است.



شکل ۴-۴

۳. برای گره مجهول مدار، معادله KCL می نویسیم.

$$\frac{V_S - V_A}{R_1} - i_D = 0 \Rightarrow \frac{V_S - V_A}{R_1} = i_D$$



در معادله فوق مقادیر i_D و V_A مجهول هستند و بنابراین به یک معادله دیگر نیازمندیم. می دانیم که در دیود، رابطه زیر حاکم است:

$$i_D = 10^{-12}(e^{V_D/0.025} - 1)$$

و از طرفی می دانیم که ولتاژ دو سر دیود برابر با V_D است و بنابراین

$$V_D = V_A$$

پس با جایگذاری دو معادله فوق، در اولین معادله داریم:

$$\frac{V_S - V_A}{R_1} = i_D = 10^{-12}(e^{V_D/0.025} - 1) \Rightarrow \frac{2 - V_A}{1K} = 10^{-12}(e^{V_A/0.025} - 1)$$

$$\Rightarrow 2 - V_A = 10^{-9}(e^{V_A/0.025} - 1)$$

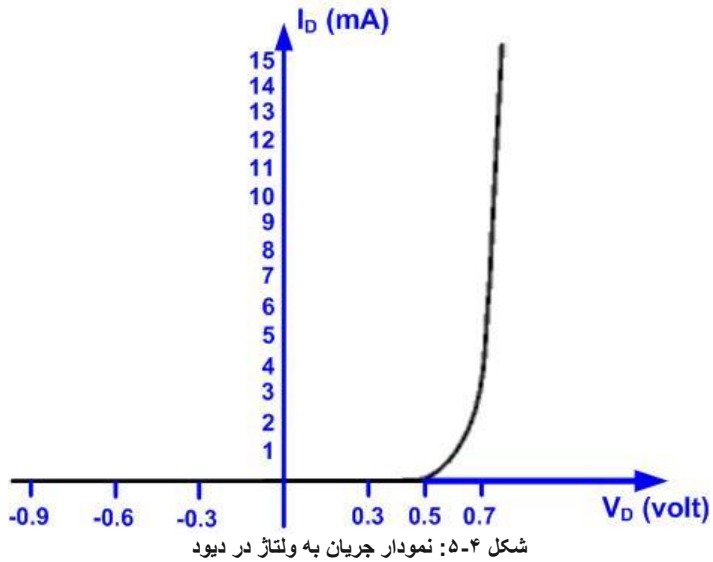
حال برای اینکه مقدار V_A را به دست آوریم لازم است که معادله فوق را حل کنیم. اما از آنجایی که معادله حالت نمایی دارد، حل کردن آن دشوار است. با توجه به اینکه معمولا عناصر غیرخطی معادلات ریاضی پیچیده ای دارند، حل کردن آنها به روش ریاضی به معادلات پیچیده ای می انجامد. بنابراین روش ریاضی معمولا روش مناسبی برای حل عناصر غیر خطی نمی باشد.

روش گرافیکی یا به قولی خطِ بار (Graphical Method)

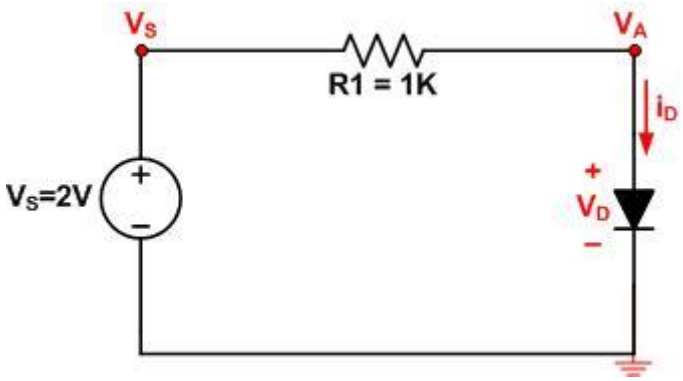
فرض کنید که در یک مسابقه ۲۰ سوالی شرکت کرده اید. تاکنون متوجه شده اید که صورت سوال، جاندار است و از طرفی دو پا دارد. بنابراین شما در ذهن خود به دنبال موجوداتی می گردید که هم جاندار باشد و هم دو پا داشته باشند. یعنی بین اطلاعاتی که دارید وجه مشترک می گیرید یا به عبارت دیگر، به دنبال موجوداتی هستید که هم شرط جاندار بودن در موردشان صدق می کند و هم شرط دو پا داشتن.

در روش گرافیکی نیز، به روشی مشابه عمل می کنیم. فرض کنید که می‌خواهیم مدار شکل ٤-٣ را با روش گرافیکی حل کنیم. می دانیم که همیشه در هر دیودی رابطه بین جریان و ولتاژ به صورت شکل ٤-٥ است. مثلا اگر ولتاژ دو سر دیود 0.6 ولت باشد حتما جریان ۱ میلی آمپر از آن در حال عبور است.

از طرف دیگر، در همه مدارها قاعده کیرشهف حاکم است. فرض کنید که در مدار شکل ٤-٣، به جای دیود، یک عنصر ناشناخته ای، مثلا لبو، داریم.



شکل ۴-۵: نمودار جریان به ولتاژ در دیود



شکل ۴-۶

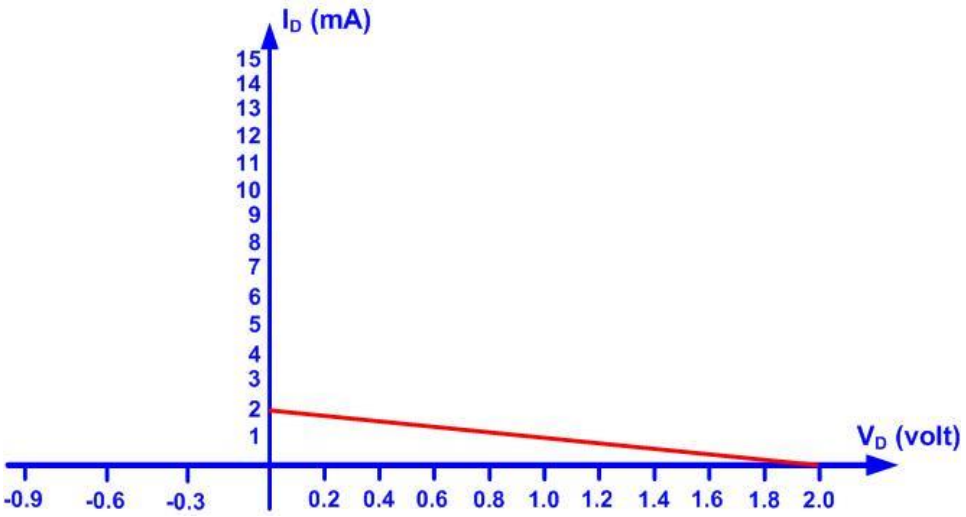
شکل ٤-٦ را ببینید. بر اساس قوانین کیرشهف و با توجه به اینکه جریان گذرا از مقاومت R_1 و دیود، همسان است، بنابراین می توانیم برای این مدار رابطه زیر را بنویسیم:

$$V_A = V_S - i_D R_1$$

و با توجه به اینکه V_A با V_D برابر است. بنابراین:

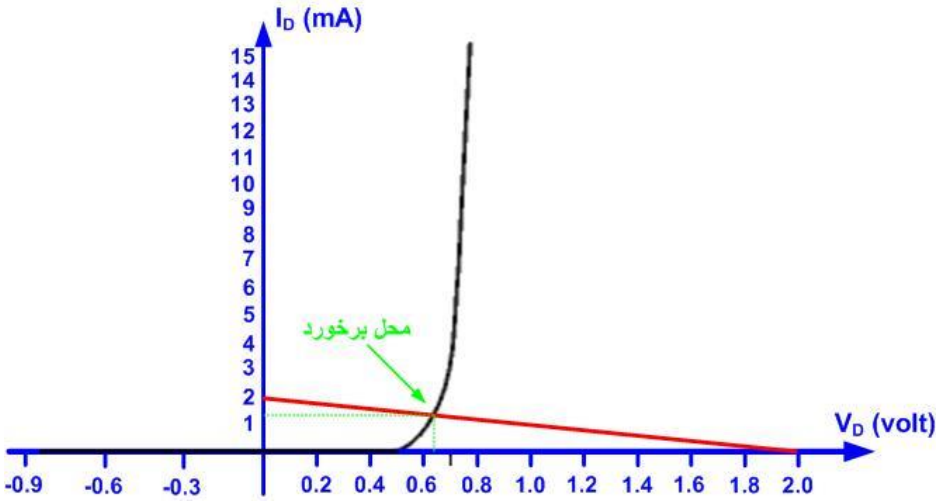
$$V_D = V_S - i_D R_1$$

که اگر نمودار آن را رسم کنیم به صورت زیر می شود:



شکل ۴-۷

هنگامی که دیودی در مداری قرار می گیرد می بایست همانند یک دیود (شکل ٤-١) رفتار کند و هم می‌بایست قانون کیرشهوف در مدار رعایت شود. پس مطابق شکل زیر نمودار مربوط به مدار را بر روی نمودار دیود رسم می کنیم. نقطه تلاقی دو نمودار، محلی است که هم خصوصیت دیود بودن رعایت شده و هم مدار بر طبق قانون کیرشهف عمل کرده و بنابراین نقطه جواب ماست.



بنابراین در این مدار مقدار جریان دیود تقریبا ۱.۵ میلی آمپر و ولتاژ دو سر دیود تقریبا ۰.٦٥ ولت است.

به طور کلی اگر شکل نمودار عنصری را داشته باشیم و بخواهیم بدانیم که مقدار جریان و ولتاژ این عنصر هنگامی که در مداری قرار می گیرد را به دست آوریم کافی است که مراحل زیر را طی کنیم:

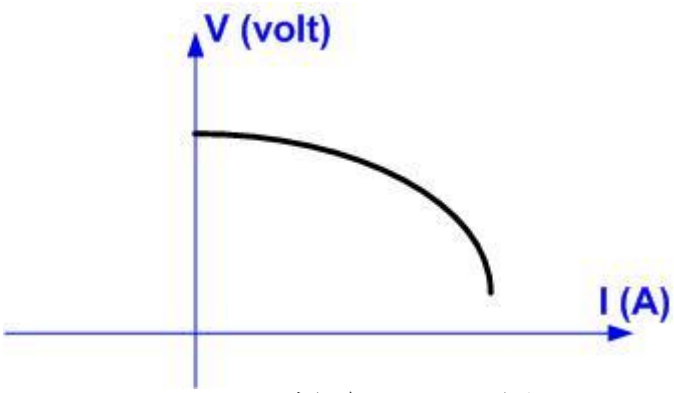
۱. در مدار مورد نظر محاسبه می‌کنیم که چه رابطه ای بین ولتاژ و جریان عنصر مورد نظر حاکم است. اگر عناصر موجود در مدار خطی باشند یک رابطه خطی بین ولتاژ و جریان عنصر به وجود می‌آید.
۲. بر روی نمودار عنصر مورد نظر، نمودار رابطه بین ولتاژ و جریان مدار را رسم می کنیم. (اصطلاحا به نمودار رابطه بین ولتاژ و جریان مدار، خط بار می گویند.) محل تلاقی دو نمودار، مقدار جریان گذرا از عنصر و ولتاژ دو سر عنصر را به ما می دهد.

روش تحلیل گرافیکی در مواردی که نمودار مربوط به عنصری را داشته باشیم می تواند مفید باشد.

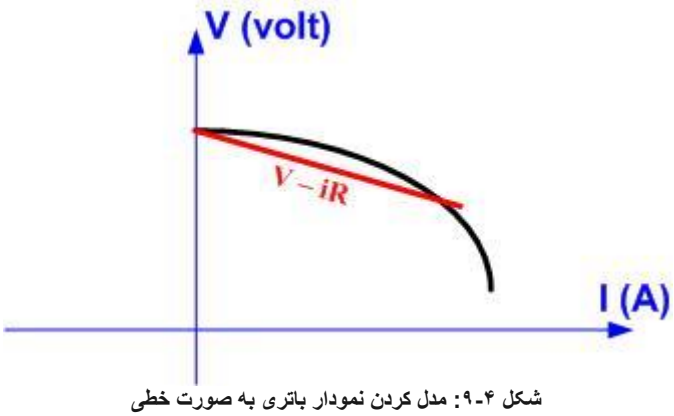
روش تکه ای خطی (Piecewise linear)

در روش تکه ای خطی، نمودار عنصر غیر خطی را با تعدادی خط راست تقریب میزنیم و سپس عنصر غیر خطی را با عناصری خطی مدل می کنیم.

اگر چه عنصر خطی ایده آل بسیار نادر است. اما بسیاری از عناصر را می توانیم به صورت خطی در نظر بگیریم. به طور مثال، نمودار ولتاژ به جریان بسیاری از باتری ها به شکل زیر است و خطی نیست. اما با کمی چشم پوشی می توانیم آنها را در دامنه کاری خود به صورت تقریبا خطی فرض کنیم و آنها را با استفاده از یک منبع ولتاژ ایده آل که با مقاومتی سری شده، مدل کنیم. یعنی همان کاری که تاکنون انجام داده ایم. شکلهای زیر را ببینید.

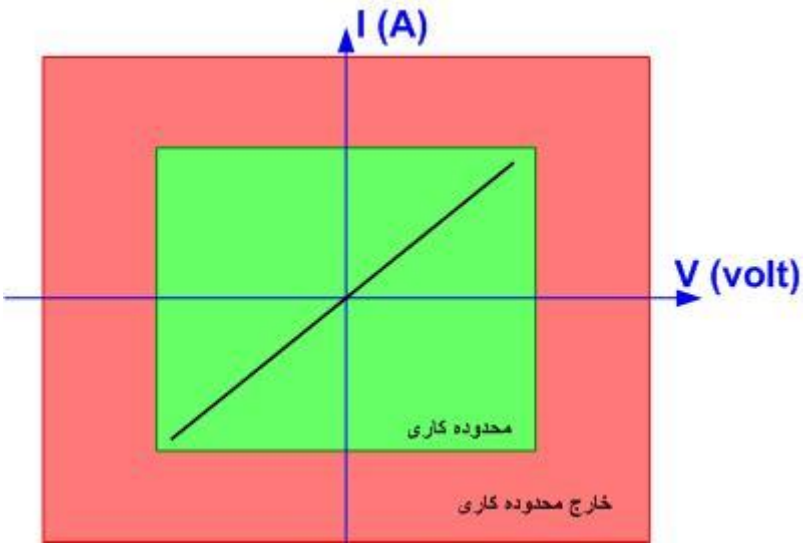


شکل ۴-۸: نمودار رابطه ولتاژ به جریان در باتری



شکل ۴-۹: مدل کردن نمودار باتری به صورت خطی

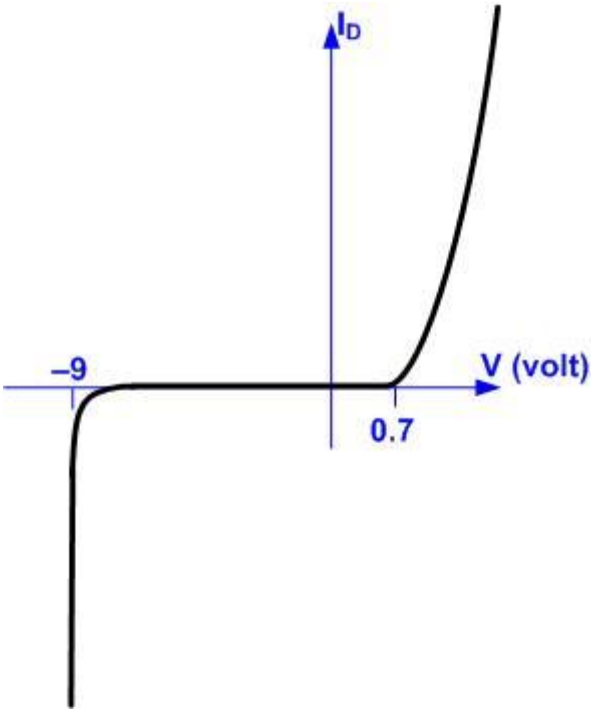
به عنوان نمونه دیگر، مقاومتهای واقعی را در نظر بگیرید. طبق قانون اهم ما اگر هر جریانی را از مقاومت ایده آل گذر دهیم رابطه ولتاژ دو سر آن با جریان می بایست از رابطه v=iR پیروی کند. بنابراین اگر جریان ۱۰۰۰ آمپر را از مقاومتی عبور دهیم می بایست ولتاژ ۱۰۰۰R دو سر آن بیافتد. در حالی که مقاومت واقعی، در عمل تحمل این ولتاژ و جریان را ندارد و می سوزد. در عین حال زمانی که جریان گذرا از مقاومت افزایش می یابد، با توجه به گرم شدن مقاومت (self-heating)، مقدار R آن تغییر می کند و بنابراین نمودار جریان به ولتاژ آن دقیقا خطی نیست. اما با کمی چشم پوشی مقاومتهای واقعی را در دامنه ولتاژ کاریشان به عنوان مقاومت ایده آل فرض می کنیم.



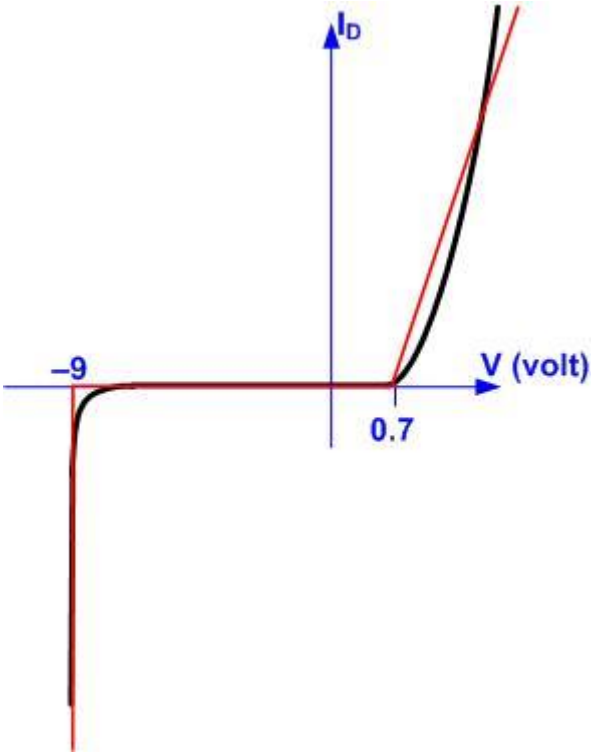
شکل ۴-۱۰

در روش تکه ای خطی، مراحل زیر را طی می کنیم:

۱. به منحنی عنصر غیر خطی نگاه می کنیم و آن را با چندین خط راست، معادل سازی می کنیم. کافی است که خود را پیکاسو در نظر بگیریم. شکل بدست آمده همان معادل تکه ای خطی شکل ماست. در شکلهای زیر، خطوط قرمز، معادل تکه ای خطی منحنی ها را نشان میدهد.



شکل ۴- ۱۱



شکل ۴-۱۲

۲. سپس بر حسب شکلی که ترسیم کرده ایم بررسی میکنیم که عنصر مورد نظر در هر بازه مشابه چه عنصر خطی ای رفتار میکند.

- به طور مثال، در شکل فوق:

  - هنگامی که ولتاژ در بازه ۹- تا ۰.۷ ولت باشد، عنصر مثل مدار باز عمل می کند و جریانی را از خود عبور نمی‌دهد.

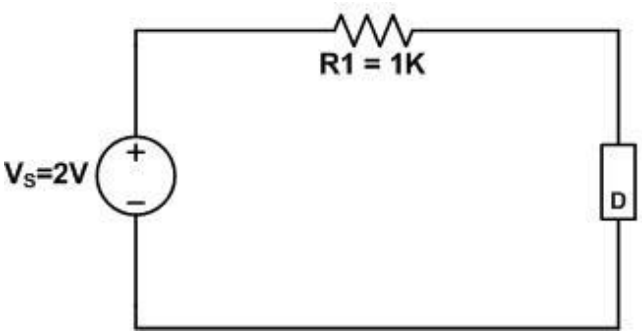
  - هنگامی که ولتاژ دو سر عنصر به ۹- ولت برسد، جریان را از خودش عبور می دهد و ولتاژ دو سر آن از ۹- کمتر نمی شود. به عبارت دیگر هنگامی که ولتاژ آن به ۹- ولت رسید همانند یک باتری ۹- ولتی ایده آل رفتار می کند که هر چه جریان از آن بگذرد همچنان ولتاژ دو سر آن ۹- ولت است. یا به قولی، مثل راننده های تاکسی ایرانی عمل میکند که تا همه صندلیها پر نشده ماشین را روشن نمی کند!

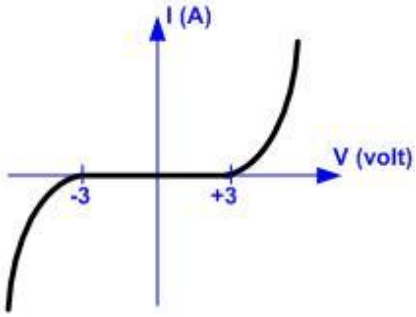
  - هنگامی که ولتاژ دو سر عنصر از 0.7 ولت بیشتر شود، از خود جریان را عبور می دهد و البته به خاطر مقاومت داخلی که دارد، هر چه بیشتر جریان از خود عبور دهد، ولتاژ دو سر آن نیز بیشتر می شود. پس می توانیم آن را با استفاده از یک منبع ولتاژ 0.7 ولت که با مقاومتی سری شده مدل کنیم.

۳. بررسی می کنیم که این عنصر، در مدار مورد نظر در چه منطقه کاری قرار دارد تا مدل مناسب عنصر را در مدار جایگذاری کنیم.

مثال ۴-۱

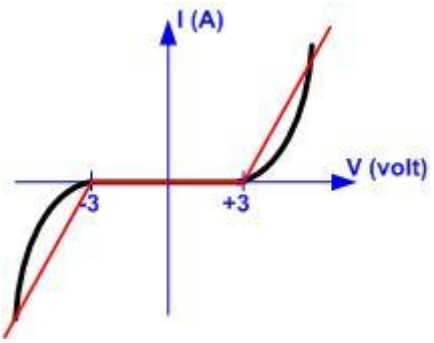
منحنی ولتاژ-جریان عنصر D در شکل زیر رسم شده است. با روش تکه ای خطی مشخص کنید در مدار روبرو، جریان گذرا از عنصر D، چقدر است.





حل:

ابتدا شکل منحنی ولتاژ-جریان عنصر D را به صورت تکه ای خطی رسم میکنیم.



طبق شکل، هر گاه ولتاژ دو سر عنصر D بیشتر از ۳ ولت یا کمتر از 3- ولت باشد، جریانی از آن عبور میکند. در مدار فوق، حداکثر ولتاژی که ممکن است به دو سر عنصر D، برسد ۲ ولت است. پس عنصر D در حکم مدار باز است و جریانی از آن عبور نمیکند.

مثال ۴-۲

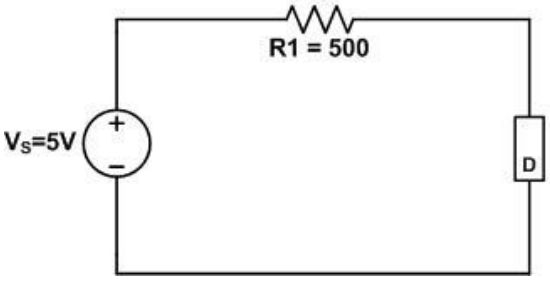
منحنی ولتاژ-جریان عنصر D در شکل زیر رسم شده است.

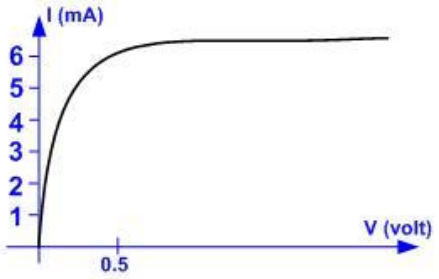
الف. با روش تکه ای خطی مشخص کنید در مدار روبرو، جریان گذرا از عنصر D و ولتاژ دو سر آن چقدر است.

ب. رفتار این عنصر، هنگامی که ولتاژ دو سر آن از 0.5V کمتر است را چگونه می توانیم مدل کنیم.

ج. اگر در مدار زیر، ولتاژ منبع تغذیه ۲ ولت باشد، جریان گذرا از مدار چقدر است؟

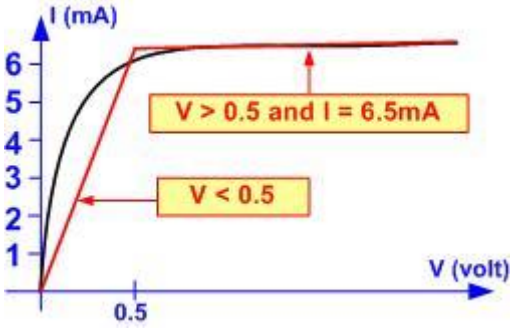
د. به روش گرافیکی (خط بار) مقدار جریان گذرا از مدار، هنگامی که ولتاژ منبع تغذیه ۲ ولت است را تحقیق کنید.





پاسخ:

الف. ابتدا شکل را به صورت تکه ای خطی ساده می کنیم که به صورت زیر میشود:



از شکل چنین استنباط می کنیم که اگر ولتاژ دو سر عنصر D، به 0.5 ولت رسیده باشد و جریان به 6.5mA بالغ شده باشد در تکه دوم نمودار قرار می گیرد و در غیر این صورت، در تکه اول قرار دارد. ابتدا بررسی می کنیم که در کدام تکه است و سپس از روی آن جریان و ولتاژ عنصر را محاسبه می کنیم.

در این مدار اگر جریان 6.5mA عبور کند ولتاژی که دو سر مقاومت افت می کند برابر است با:

$$V_{R1} = iR_1 = 6.5mA*500 = 3.250V$$

بنابراین ولتاژی که به دو سر عنصر D میرسد برابر است با:

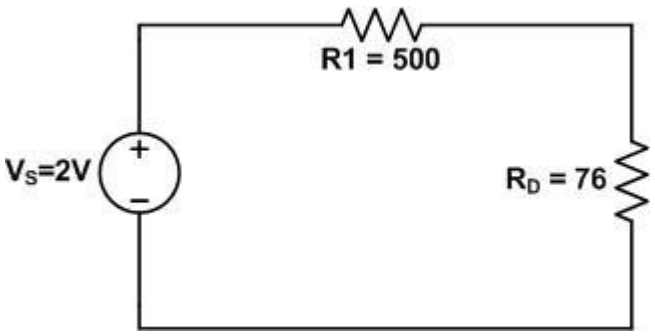
$$5 - 3.25 = 1.75V$$

پس هر دو شرط مورد نیاز برای قرار گرفتن در تکه دوم آماده است (هم ولتاژ دو سر عنصر بالای 0.5 ولت است و هم جریان گذرا به ۶،۵ میلی آمپر رسیده است.) بنابراین ولتاژ دو سر عنصر 1.75V و جریان گذرا 6.5mA است.

ب. برای زمانی که ولتاژ کمتر از 0.5 ولت است، می توانیم این عنصر را با مقاومت مدل سازی کنیم که مقدار این مقاومت را می توانیم از طریق شیب خط و یا با استفاده از مقدار یک نقطه بر روی آن محاسبه کنیم. در بالاترین نقطه این خط هنگامی که جریان 6.5 میلی آمپر است ولتاژ دو سر عنصر برابر 0.5 ولت است. پس مقاومت تقریبی این عنصر در بازه کمتر از 0.5 ولت برابر است با:

$$R = v/i = 0.5/6.5mA = 0.076K = 76$$

ج. در این حالت جریان گذرا از مدار به 6.5mA نمی تواند برسد، زیرا حتی اگر ولتاژ دو سر عنصر D برابر با صفر شود جریان گذرا برابر است با $V_S/R1=2/500=4mA$. پس عنصر در تکه اول قرار دارد. برای اینکه جریان تقریبی گذرا از مدار را حساب کنیم، به جای عنصر D، مقاومت 76 اهمی را در مدار قرار می دهیم:

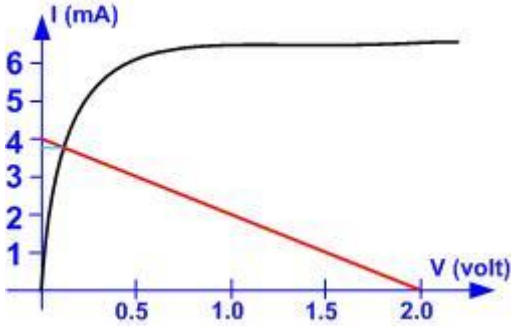


بنابراین جریان گذرا از مدار، تقریبا برابر است با:

$$i = \frac{2}{500+76} = \frac{2}{576} = 0.0035A = 3.5mA$$

د. بر حسب مدار صورت سوال، رابطه جریان گذرا از عنصر با ولتاژ دو سر عنصر به صورت زیر است:

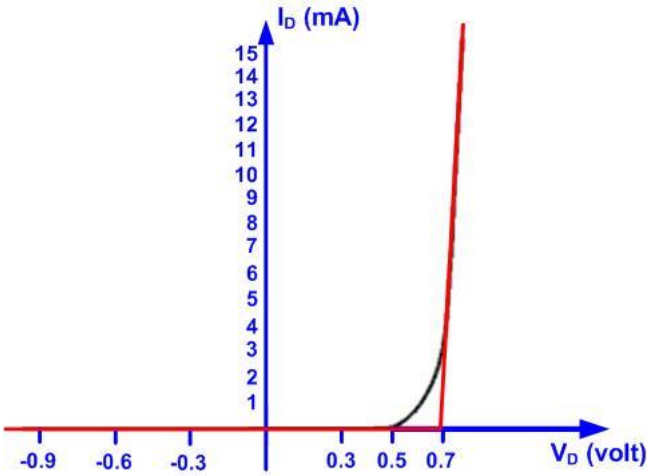
$$V_D = V_S - iR_1 = 2 - 500i$$



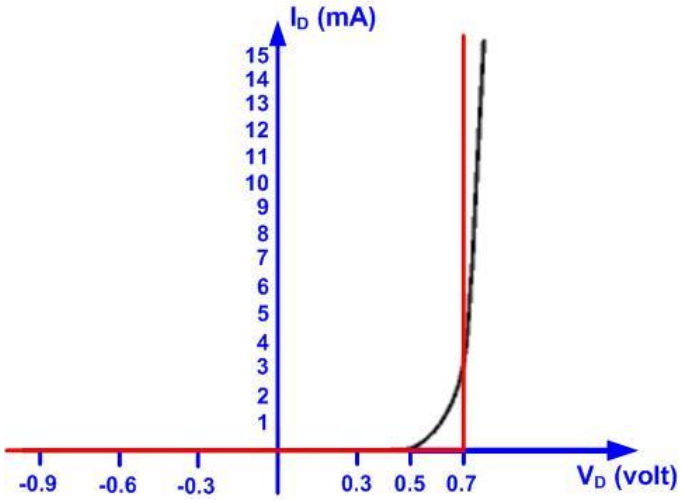
بر طبق روش گرافیکی، جریان گذرا از عنصر در حدود 3.7mA یا 3.8mA است که به جوابی که به طور تقریبی در قسمت ج بدست آورده ایم نزدیک است و بنابراین مدل قسمت ج با تقریب خوبی این عنصر را مدل کرده است.

توضیح: در روش تکه ای خطی لزومی ندارد که به ازای هر مداری که تحلیل می کنیم، نمودار عنصر را رسم کنیم. بلکه یکبار نمودار عنصر مورد نظر را مورد بررسی قرار می دهیم و ضوابط مورد نظر را از آن استنتاج می کنیم و سپس هر بار که آن عنصر را می خواهیم در مداری استفاده کنیم مستقیما از روابط استنتاج شده بهره می گیریم. مثلا اگر عنصر به کار رفته در مثال فوق را در مدار دیگری استفاده کنیم، ضوابط موجود را در نظر می گیریم. یعنی بررسی میکنیم که آیا ولتاژ بیش از ۰.۵ ولت و جریان ٦.۵ میلی آمپر است یا نه. به عبارت دیگر، گامهای اول و دوم از تحلیل تکه ای خطی یکبار انجام میشود و گام سوم آن به ازای هر مدار تکرار می شود.

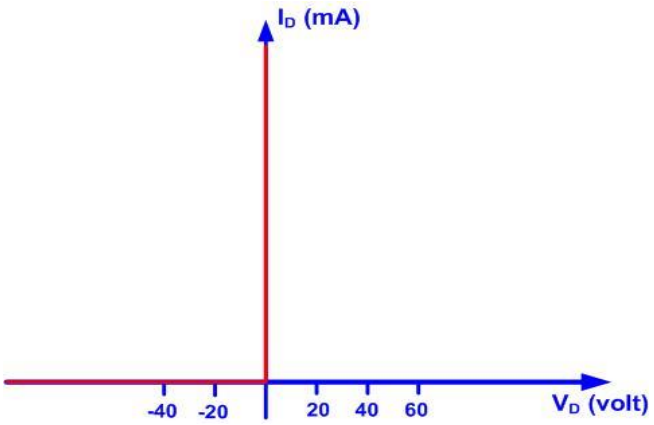
حال باز گردیم به سراغ دیود و مداری که از ابتدای فصل با آن کار می کردیم. اگر بخواهیم نمودار دیود را با خط راست مدل کنیم، می توانیم آن را با دو خط راست به صورت زیر مدل کنیم



موقع بالا رفتن، نمودار زاویه چندانی با عمود ندارد و بنابراین می توانیم فرض کنیم که نمودار به طور عمودی در نقطه ۰.۷ به طرف بالا حرکت می کند. (شکل زیر)



اگر ما نمودار دیود را کمی zoom out کنیم و آن را برای ولتاژهای بزرگتری رسم کنیم، خط نمودار بر روی محور مختصات می افتد. گویی که در ۰ ولت نمودار به طرف بالا رفته است. (شکل زیر)



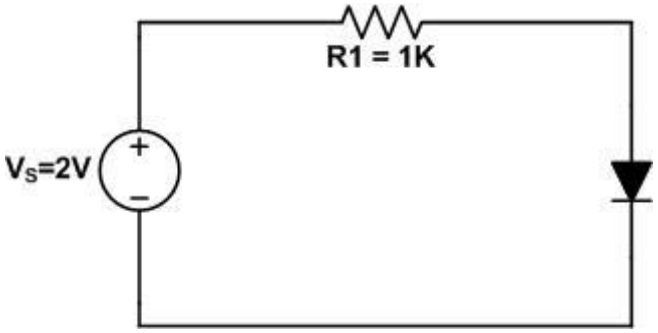
توجه دارید که هر چه بتوانیم شکل را با تکه خط های کمتر و ساده تری مدل کنیم، بعدا تحلیل کردن مدار ساده تر خواهد شد.

در آخرین نمودار، دیود به صورت عنصری ساده شده که جریان های مثبت را از خود عبور می دهد و جریانهای منفی را از خود عبور نمی دهد. به این مدل از دیود، مدل *دیود ایده آل* می گویند. اصطلاحا زمانی که دیود از خود جریان عبور می دهیم می گوییم که روشن است و هنگامی که از آن جریانی نمی گذرد می گوییم خاموش است.

برای اینکه با استفاده از مدل ایده آل، رفتار دیودهای مدار را بررسی کنیم، کافی است که جهت جریان را در شاخه ای که دیود در آن است براورد کنیم. اگر جهت جریان، با جهت فلش دیود همسان باشد دیود روشن است و ولتاژ دو سر دیود صفر است. در غیر این صورت دیود خاموش است.

مثال ۴-۳

با استفاده از مدل دیود ایده آل، بررسی کنید که آیا دیود در مدار زیر روشن است یا خاموش.

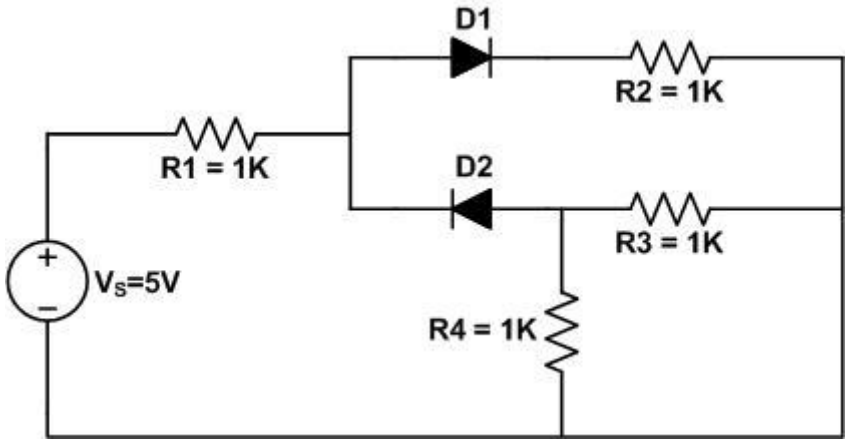


پاسخ:

جهت جریان از قطب مثبت باتری به قطب منفی آن است. پس جهت جریان با جهت فلش دیود، هم جهت است و دیود روشن است.

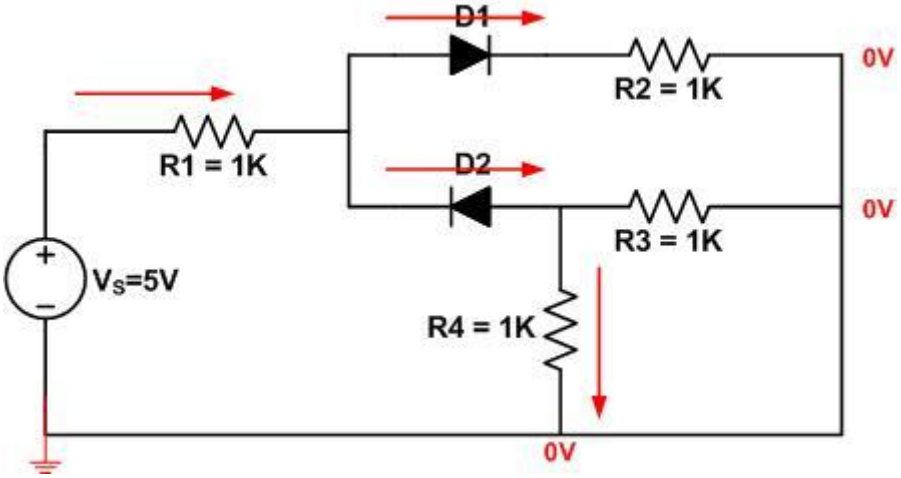
مثال ۴-۴

با استفاده از مدل دیود ایده آل بررسی کنید که وضعیت هر یک از دیودها در مدار زیر چگونه است.



پاسخ:

بررسی می کنیم که جهت جریان در هر یک از شاخه ها، در چه راستایی می بایست باشد. اگر جهت جریان، با راستای دیود همسان بود، دیود روشن است. جهت جریان، از قطب مثبت منبع ولتاژ، به قطب منفی آن است. پس جهت جریان، در شاخه های مدار به شکل زیر است.



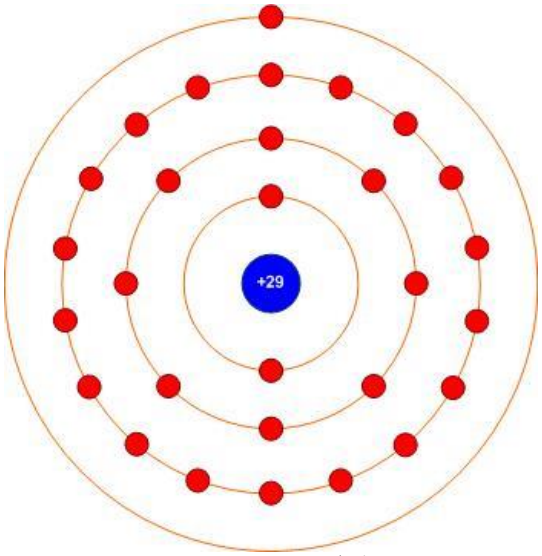
بنابراین در دیود D1 جهت جریان با جهت دیود همسان است و روشن است.

در دیود D2 جهت جریان در خلاف جهت دیود است. پس دیود D2 خاموش است و در حکم مدار باز عمل می کند و جریانی از آن عبور نمی کند.

فصل پنجم: دیود و کاربردهای آن

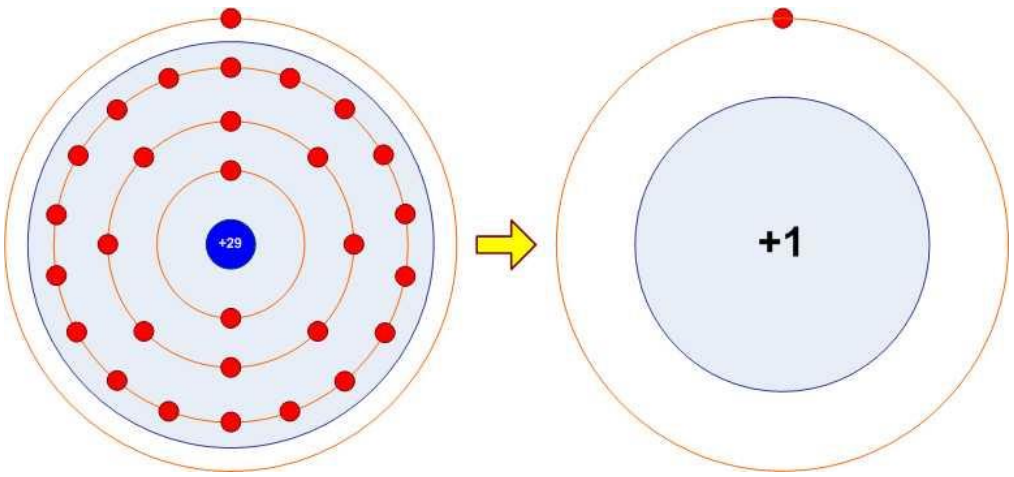
بخش ۵-۱: آشنایی با نیمه هادی ها

در دروس فیریک و شیمی دبیرستان دیدیم که هر اتم از تعدادی الکترون و پروتون و نوترون تشکیل شده است. پروتون و نوترون در مرکز اتم قرار دارند و هسته اتم را تشکیل می دهند، در حالیکه الکترونها در مدارهایی به دور هسته اتم می چرخند. الکترونهایی که در مدارهای نزدیک به مرکز قرار دارند با نیروی زیادی به طرف هسته اتم کشیده میشوند. در حالی که الکترون های آخرین مدار (لایه ظرفیت) اگر کمی گرما دریافت کنند از اتم خود جدا می شوند و می توانند به اتمهای دیگر بروند که از جابجا شدن این الکترونها در داخل ماده، جریان الکتریکی به وجود می آید. در برخی از مواد که رسانا خوانده می شوند، الکترونهای مدار آخر، در دمای اتاق، انرژی کافی برای جدا شدن از هسته را به دست آورده اند و الکترونهای آزاد زیادی دارند و بنابراین می توانند به راحتی جریان را از خود عبور دهند. در حالی که در برخی دیگر از مواد، الکترونهای لایه ظرفیت به نیروی زیادی به طرف هسته اتم کشیده می شوند و الکترون آزاد چندانی ندارند و نارسانا هستند.

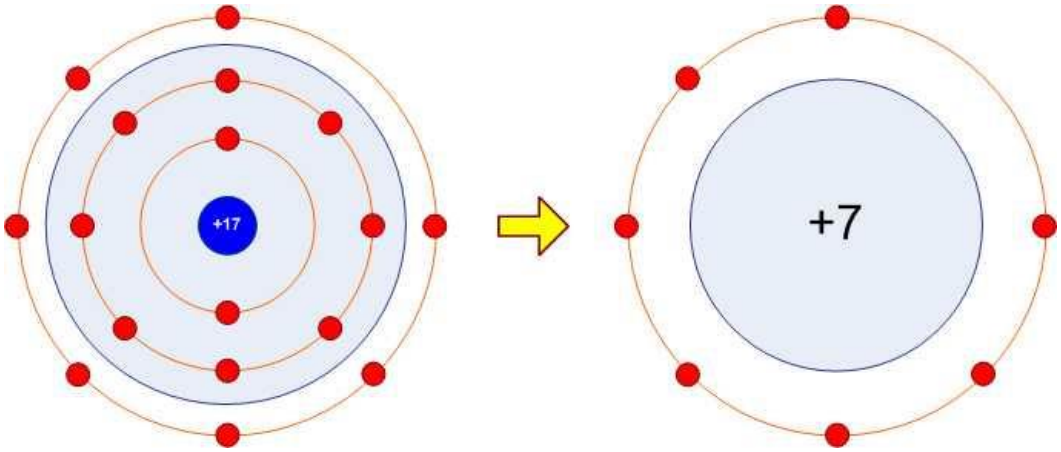


شکل ۵-۱: اتم مس (Cu)

با توجه به اینکه الکترونهای لایه های داخلی در جریان الکتریسیته نقشی ایفا نمی کنند، بنابراین می توانیم مدل اتم ها را ساده کنیم و کل هسته و الکترونهای لایه های داخلی را در حکم یک توپی فرض کنیم که الکترونهای لایه ظرفیت به دور آن طواف می کنند که بار الکتریکی این توپ، از حاصل جمع بار پروتونهای هسته و الکترونهای لایه های داخلی به دست می آید که مقدار آن برابر با قرینه حاصل جمع بارهای الکترونهای لایه ظرفیت می باشد (زیرا جمع جبری بار الکتریکی این توپ و الکترونهای لایه ظرفیت می بایست صفر شود.) شکلهای ۵-۲ و ۵-۳ را ببینید.

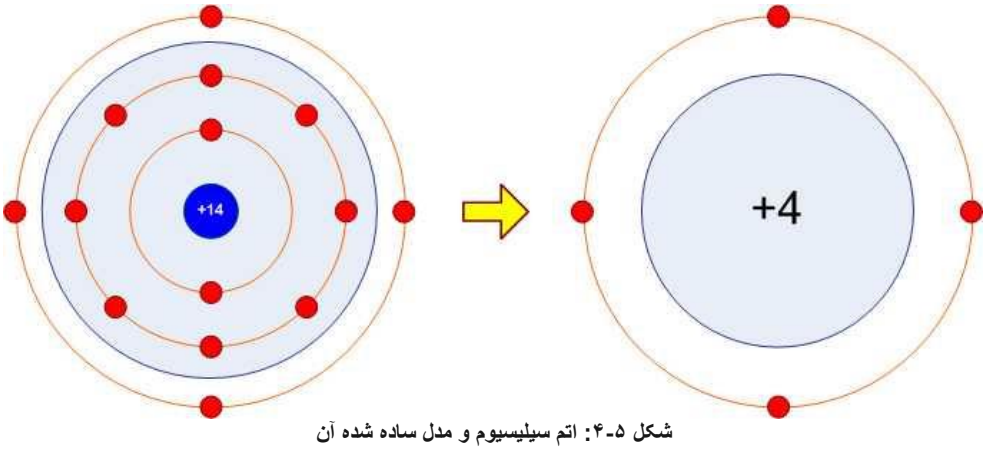


شکل ۵-۲: شکل ساده شده اتم مس (Cu)

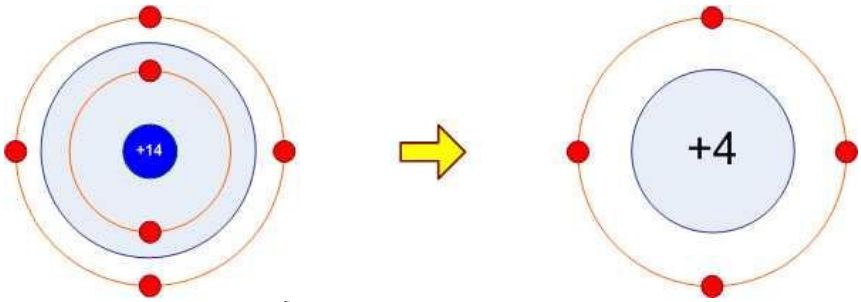


شکل ۵-۳: شکل ساده شده اتم کلر (Cl)

در این مدل ساده شده مشاهده می کنیم که در اتمی که تعداد الکترونهای لایه ظرفیت کمتر باشد، بار مثبت توپ مرکزی نیز کمتر می شود و بنابراین هر الکترون ظرفیت به نیروی کمتری به درون هسته کشیده می شود. مثلا در ماده ای که یک الکترون ظرفیت دارد، با نیروی ۱+ به درون اتم کشیده می شود، در حالی که در ماده ای که هفت الکترون ظرفیت دارد، هر الکترون، با نیروی ۷+ به درون اتم کشیده می شود و بنابراین در اتمی که یک الکترون ظرفیت دارد، الکترون لایه ظرفیت به راحتی از اتم جدا می شود و این ماده رسانایی خوبی دارد، در حالی که در ماده ای که تعداد الکترونهای لایه ظرفیت زیاد است با این الکترونها به شدت به هسته اتم وابسته اند و این مواد رسانایی ضعیفی دارند. به همین خاطر است که عناصر ستون اول رسانایی زیادی دارند و ستونهای آخر رسانایی کمی دارند. در این بین عناصر ستون چهارم وضعیتی فی مابین دارد و به آنها نیمه رسانا (نیمه هادی) گفته می شود.

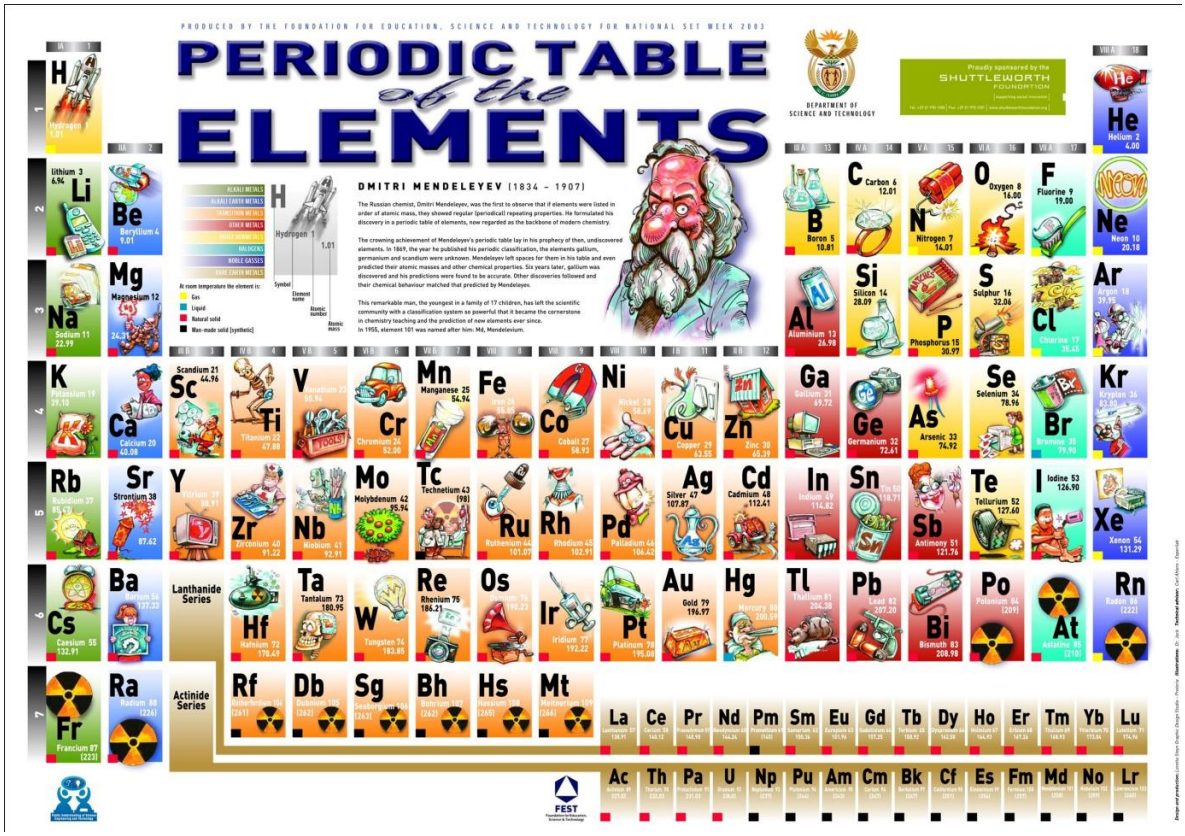


شکل ۵-۴: اتم سیلیسیوم و مدل ساده شده آن



شکل ۵-۵: اتم کربن و مدل ساده شده آن

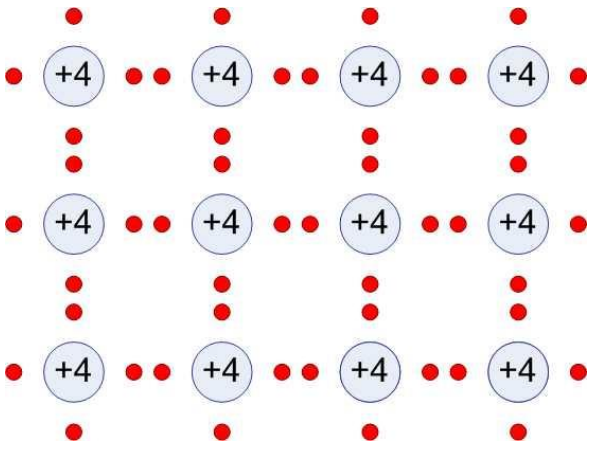
از جمله عناصر این ستون عبارتند از: کربن (C)، سیلیسیوم (سیلیکون) و ژرمانیوم (Ge) که در این بین سیلیسیوم بیش از همه در دنیای نیمه هادی ها کاربرد دارد، ژرمانیون نیز تا حدودی استفاده می شود و کربن کمتر به عنوان نیمه رسانا به کار گرفته می شود.



شکل ۵-۶: جدول مندلیوف

عناصر نیمه هادی

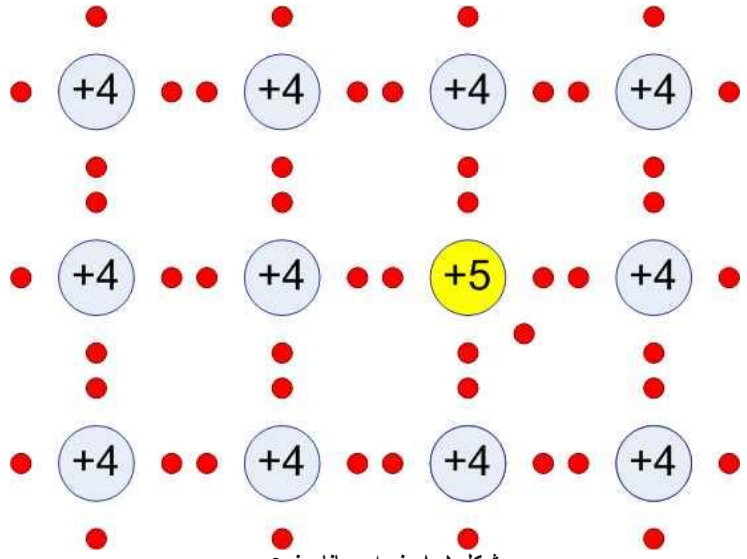
در عناصر نیمه هادی هر اتم، دارای ٤ الکترون لایه ظرفیت است که با پیوند کووالانس به چهار اتم مجاور خود متصل است و شبکه ای را به شکل زیر تشکیل می دهد. پیوندهای کووالانس سبب شده که هر اتم دارای ۸ الکترون لایه ظرفیت شود و ماده حالتی پایدار داشته باشند و الکترونها تمایل چندانی به جدا شدن از اتم خود و حرکت در داخل ماده نداشته باشند. بنابراین در عناصر نیمه هادی الکترون آزاد چندانی وجود ندارد.



شکل ۵-۷: پیوندهای کووالانسی موجود در عناصر نیمه هادی

ایجاد نیمه رسانای نوع n

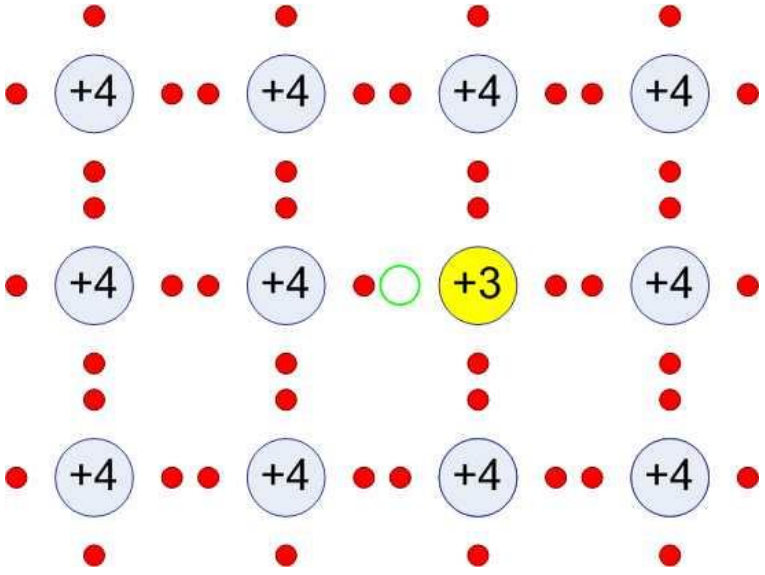
ما اگر یک نیمه هادی را با عنصری که ۵ الکترون در لایه ظرفیت خود دارد ترکیب کنیم، چهار الکترون از الکترونهای لایه ظرفیت این عنصر با نیمه هادی پیوند کووالانس تشکیل می دهد و یک الکترون اضافه می ماند که آزاد است و می تواند در درون ماده جابجا شود. (شکل زیر) با توجه به اینکه این ماده الکترون (بار منفی) اضافی دارد به آن (negative) n می‌گوییم.



شکل ۵-۸: نیمه رسانای نوع n

ایجاد نیمه رسانای نوع p

ما اگر یک نیمه هادی را با عنصری که ۳ الکترون در لایه ظرفیت خود دارد ترکیب کنیم، سه الکترون از الکترونهای لایه ظرفیت این عنصر با نیمه هادی پیوند کووالانس تشکیل می دهد و یک جای خالی برای یک الکترون باقی می ماند که به این جای خالی اصطلاحا حفره گفته می شود. این حفره می تواند پذیرای یک الکترون باشد. (شکل زیر) به این ماده اصطلاحا p (positive) می‌گوییم.

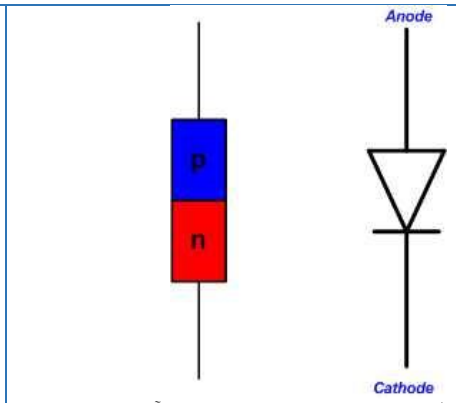


شکل ۵-۹: نیمه رسانای نوع p (در این شکل، حفره با دایره سبز مشخص شده)

بخش ۵-۲: دیود

آشنایی با ساختار داخلی دیود

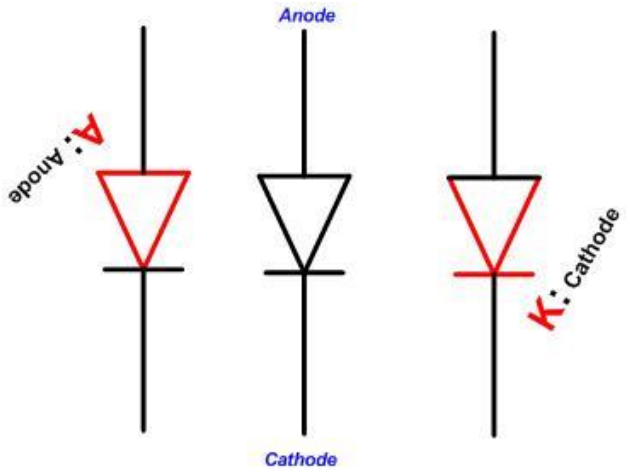
ما اگر یک ماده نوع n را به یک ماده نوع p بچسبانیم، یک دیود به وجود می آید. (شکل زیر)



شکل ۵-۱۰: ساختار دیود در کنار نماد آن

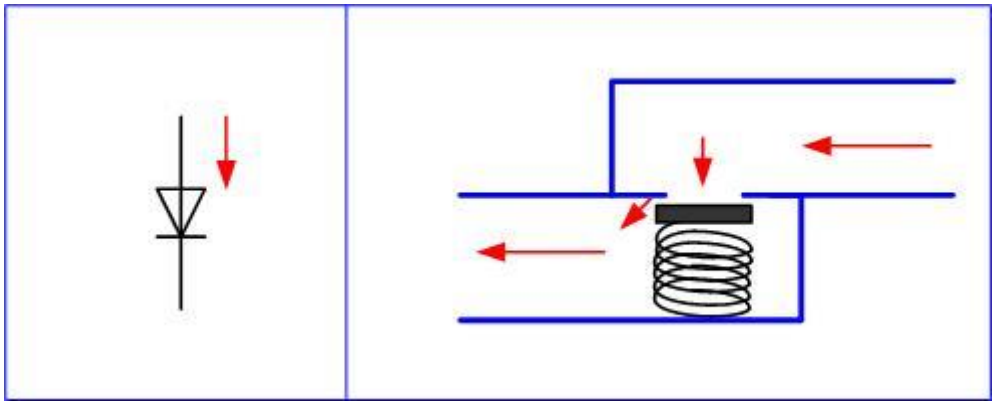
شکل ۵-۱۱: عکس یک دیود

همانطور که می بینید دیود دارای دو پایه است که پایه ای که طرف سر فلش آن قرار گرفته را کاتد و پایه ای که طرف ته فلش قرار گرفته را آند می گویند. برای اینکه سر آند و کاتد را بخوبی به خاطر بسپارید، شکلهای زیر را ببینید.



همانطوری که در شکل فوق می بینید، قسمت نزدیک به سر کاتد، شبیه K است و قسمت نزدیک به آند شبیه A است و با استفاده از این مشابهت می توانیم سر آند و کاتد را تشخیص دهیم.

دیود همانند یک شیر یکطرفه آب عمل میکند. شیر یکطرفه که ساختار آن را در زیر می بینید، در داخل خود یک دریچه دارد که توسط فنری به طرف بالا هل داده می شود. اگر آب بخواهد در راستای نمایش داده شده در شکل حرکت کند، دریچه را به طرف پایین هل می دهد و عبور می کند. اما اگر بخواهد در خلاف جهت حرکت کند، دریچه به بالا هل داده میشود و جلوی مجرای عبور را آب را می بندد. دیود نیز ماهیت مشابه دارد، جریان الکتریسیته می تواند در راستای فلش از دیود عبور کند. اما اگر جریان بخواهد در خلاف جهت فلش از دیود بگذرد، دیود در حکم مدار باز عمل می کند و جریان را از خودش عبور نمی دهد.



شکل ۵-۱۲: ساختار شیر یکطرفه در مقایسه با دیود

اگر بخواهیم رفتار دیود را دقیق تر بیان کنیم، عملکردش به این صورت است که اگر ولتاژ سر کاتد دیود از سر آنود آن کمتر باشد، دیود خاموش است و جریانی از آن نمی گذرد و در حکم مدار باز رفتار می کند. اما اگر ولتاژ آنود دیود از سر کاتد آن به اندازه ۰.۷ بیشتر شود، دیود جریان را از خود عبور می دهد. ولتاژ سر آنود هیچگاه بیش از ۰.۷ ولت، از ولتاژ کاتد بیشتر نمی شود. بنابراین هنگامی که دیود روشن است، می توانیم آن را با یک باتری ۰.۷ ولتی مدل کنیم.

تحلیل مدارهای دیودی با استفاده از روش برهان خلف

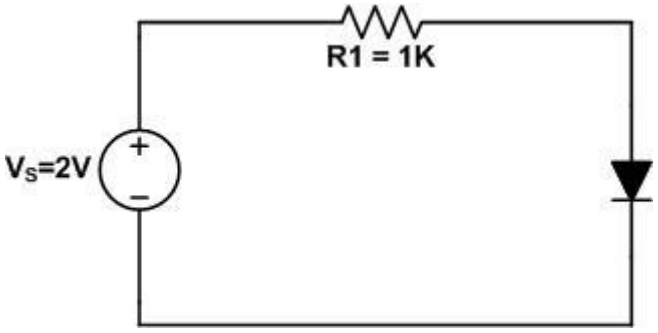
در فصل گذشته، با استفاده از روشهای بنیادی تحلیل عناصر غیرخطی، به تحلیل دیود پرداختیم. در این فصل، با به کار گیری روشی تکنیکی، مدارهای دیودی را تحلیل می کنیم.

در روش برهان خلف:

ابتدا فرض می کنیم که کلیه دیودهای مدار خاموش باشند و آنها را از مدار حذف می کنیم. در این حالت، ولتاژ دو سر دیودها را محاسبه می کنیم. می دانیم که برای اینکه دیودی خاموش باشد، باید ولتاژ دو سر آن کمتر از ۰.۷ باشد. به عبارت دیگر، اگر ولتاژ دو سر دیودی بیش از ۰.۷ ولت بود آن دیود روشن است. بنابراین اگر ولتاژ دو سر دیودی کمتر از ۰.۷ شود، طبق خاصیت دیود، می بایست خاموش باشد و بنابراین فرض ما نیز درست بوده، اما اگر ولتاژ دو سر دیودی بیشتر از ۰.۷ باشد، فرض ما غلط بوده و دیود روشن است.

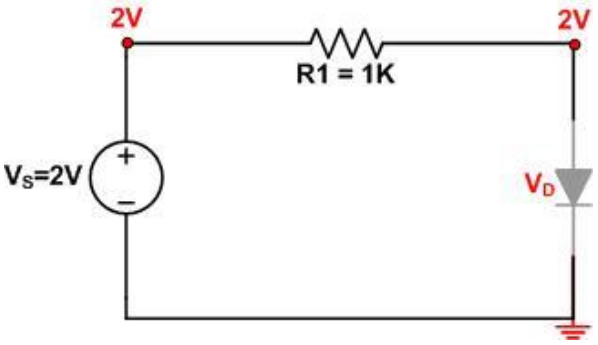
توجه داشته باشید که اگر فرض ما، غلط از آب درآمد و دیودی روشن شد، می بایست بررسی کنیم که آیا روشن شدن آن دیود، بر روشن و خاموش شدن سایر دیودها تاثیری دارد یا نه.

مثال ۶-۱: الف. با استفاده از روش برهان خلف، بررسی کنید که در مدار زیر، وضعیت دیود چگونه است. ب. جریان گذرا از آن را حساب کنید.



حل:

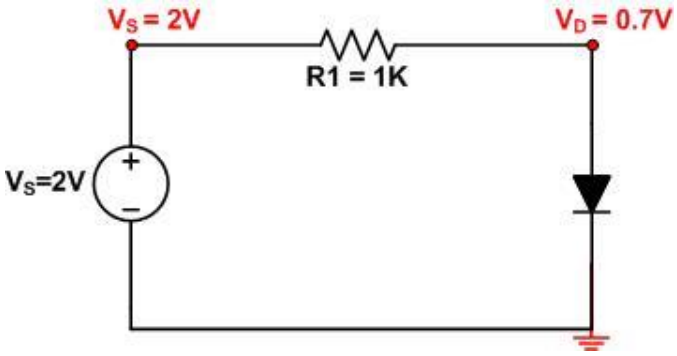
الف. ابتدا فرض می کنیم که دیود خاموش باشد. اگر دیود خاموش باشد، جریان گذرا از آن صفر است. پس جریان گذرا از مقاومت نیز صفر است و افت ولتاژ روی مقاومت نیز صفر است. بنابراین ولتاژ دو سر دیود به قرار زیر است:



همانطوری که در شکل فوق می بینیم ولتاژ دو سر دیود برابر است با:

$$V_d = 2 - 0 = 2 > 0.7$$

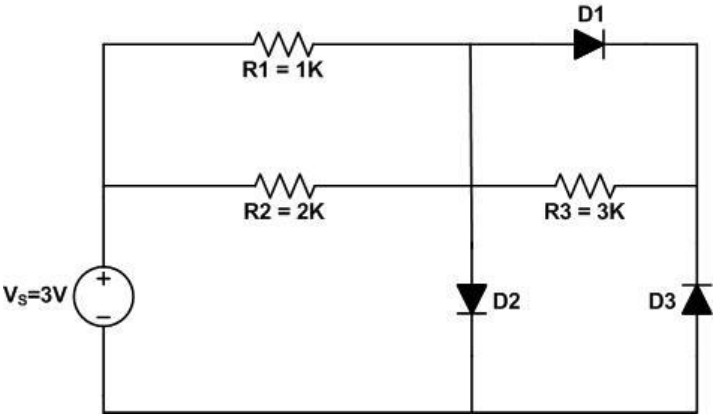
همانطوری که میدانیم اگر ولتاژ آند بیشتر از ۰,۷ ولت از ولتاژ کاتد بیشتر باشد دیود روشن میشود. در مدار فوق نیز می بینیم که ولتاژ دو سر دیود از ۰,۷ ولت بیشتر شده است. بنابراین فرض اولیه مبنی بر خاموش بودن دیود غلط است و دیود روشن است و ولتاژ ۰,۷ ولت دو سر دیود میافتد و مدار به صورت زیر خواهد بود:



ب. جریان گذرا از دیود، با جریان گذرا از مقاومت برابر است. بنابراین جریان دیود برابر است با:

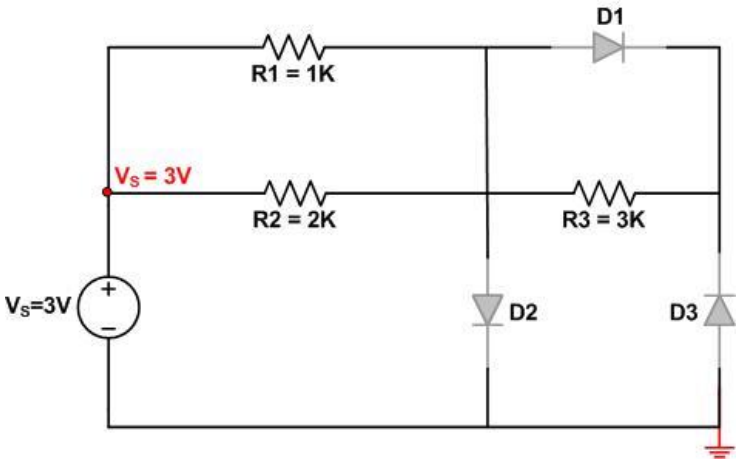
$$I_D = I_{R1} = \frac{V_S - V_D}{R1} = \frac{2-0.7}{1K} = \frac{1.3}{1K} = 1.3mA$$

مثال ۶-۲: الف. با استفاده از روش برهان خلف، بررسی کنید که در مدار زیر، وضعیت دیودها چگونه است.
ب. ولتاژ گره های مختلف مدار را حساب کنید.

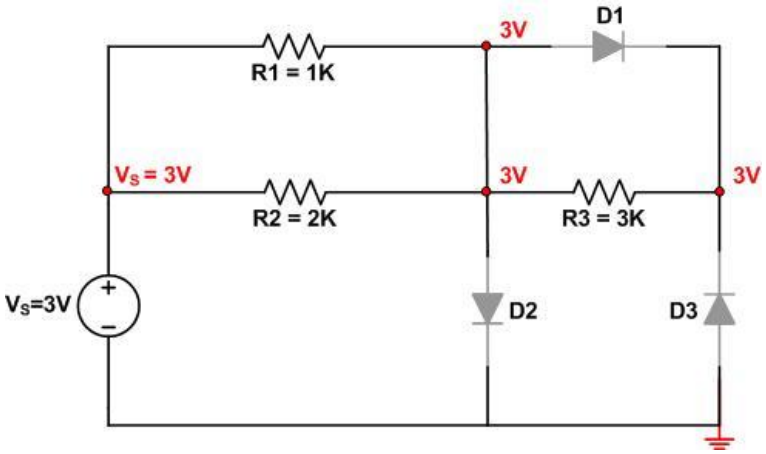


حل:

ابتدا فرض می کنیم که همه دیودها خاموش باشند و ولتاژ دو سر دیودها را در این حالت بررسی می کنیم.



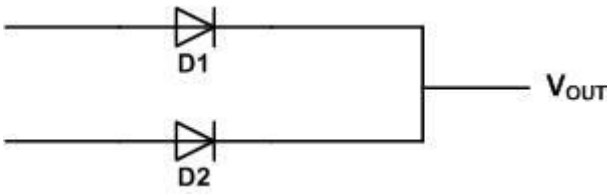
اگر دیودها مطابق شکل فوق خاموش باشند، هیچ جریانی در مدار به وجود نمی آید. زیرا همه مقاومتها به سر مثبت منبع متصل شده اند و هیچ ارتباطی به سر منفی منبع ولتاژ ندارند. به عبارت دیگر هیچ حلقه ای که در آن منبعی قرار گرفته باشد، وجود ندارد. پس جریانی به وجود نمی آید و افت ولتاژ روی مقاومتها صفر است. در این حالت ولتاژ گره های مختلف به صورت زیر است:



کاربردهای دیود

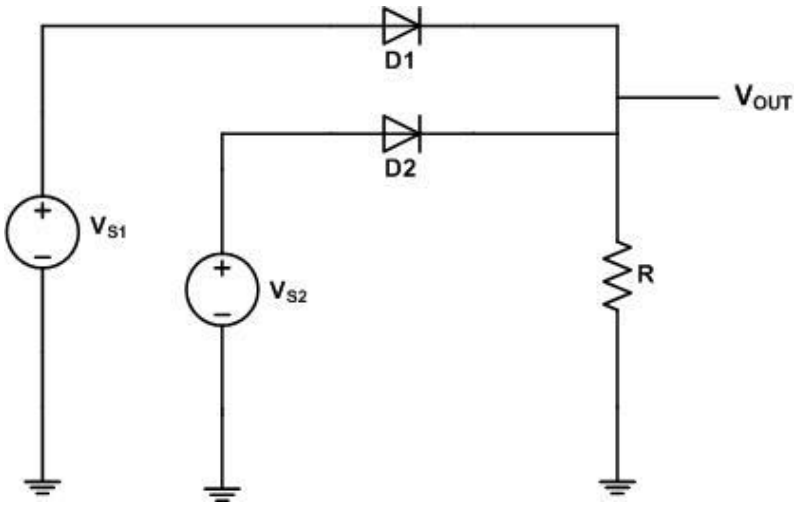
۱ . مدار OR کننده و ماکسیمم گیر

شکل روبرو را ببینید. این مدار اگر چه ظاهر ساده ای دارد و از دو دیود تشکیل شده است اما از آن می توانیم برای اندازه گرفتن مقدار ماکسیمم دو سیگنال و نیز OR کردن، استفاده کنیم. در زیر این کاربردها را می بینیم.



مدار OR کننده

فرض کنید، منابع ولتاژ V_{S1} و V_{S2} منابعی ۵ ولت باشند. می خواهیم ببینیم که هنگامی که هر یک از این منابع روشن و یا خاموش است مقدار ولتاژ در V_{OUT} چقدر است.



الف. هنگامی که هر دو منبع خاموش باشند (ولتاژ منابع صفر ولت باشد)

در این حالت با توجه به اینکه منبعی در مدار وجود ندارد، بنابراین جریانی در مدار به وجود نمی آید و بنابراین دیود نیز خاموش است.

اگر بخواهیم به روش برهان خلف عمل کنیم، نیز، هنگامی که دیودها را خاموش فرض کنیم و آنها را حذف کنیم به شکل زیر می رسیم که در این حالت، ولتاژ دو سر دیودها صفر می شود و بنابراین V_{OUT} صفر می شود.

ب. هنگامی که منبع V_{S1} روشن و منبع V_{S2} خاموش است

به روش برهان خلف عمل می کنیم و فرض می کنیم که دیودها خاموش باشند که در این صورت مدار به شکل زیر می شود:

در شکل فوق، ولتاژ سر آند دیود D1، به اندازه ۵ ولت بیش از سر کاتد آن است. در حالی که می دانیم اگر سر آند به اندازه 0.7 ولت بیش از سر کاتد شود، دیود روشن می شود. پس فرض ما مبنی بر خاموش بودن D1 غلط بوده و دیود D1 روشن است و مطابق شکل ولتاژ V_{OUT} به اندازه 4.3 ولت می شود.

ج. هنگامی که منبع V_{S2} روشن و منبع V_{S1} خاموش است

این حالت مشابه حالتی است که منبع V_{S1} روشن و منبع V_{S2} خاموش است و اگر به روش برهان خلف عمل کنیم، می بینیم که دیود D2 روشن است و ولتاژ V_{OUT} به اندازه 4.3 ولت می شود.

د. هنگامی که هر دو منبع V_{S1} و V_{S2} روشن باشند

طبق روش برهان خلف، ابتدا فرض می کنیم که هر دو دیود خاموش باشند که مدار به صورت زیر می شود:

در شکل فوق، ولتاژ سر آند دیود D1، به اندازه 5 ولت بیش از سر کاتد آن است. در دیود D2 نیز ولتاژ سر آند 5 ولت بیش از سر کاتد آن است. در حالی که می دانیم اگر سر آند به اندازه 0.7 ولت بیش از سر کاتد شود، دیود روشن می شود. پس فرض ما مبنی بر خاموش بودن دیودها غلط بوده و دیود D1 و یا D2 روشن است.

حال می بایست بررسی کنیم که کدامیک از دیودها روشن است. اگر D1 روشن شود ولتاژ V_{OUT} به اندازه 4.3 ولت می شود که در این صورت اختلاف ولتاژ دو سر D2 نیز 0.7 ولت میشود و بنابراین D2 نیز روشن است. اگر D2 روشن شود نیز ولتاژ V_{OUT}، 4.3 ولت می شود. نظر به اینکه روشن بودن هر یک از آنها منافاتی با روشن شدن دیگری ندارد و شرط روشن شدن برای هر دو دیود فراهم است، پس هر دو دیود روشن هستند.

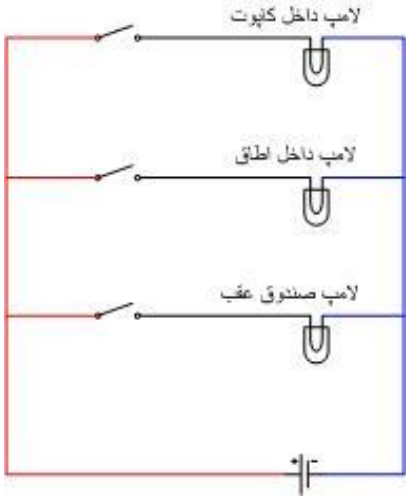
ما در فوق، چهار حالت مختلفی که ممکن است منابع داشته باشند را بررسی کردیم و دیدیم که کافی است یکی از منابع روشن باشند تا ولتاژ خروجی 4.3 ولت شود. همانطوری که در درس لاجیک خوانده اید و یا خواهید آموخت، به چنین مداری مدار or می گوییم. از این مدار، در دنیای آنالوگ برای OR کردن سیگنالها استفاده می شود و نمونه ای از کاربرد آن را در زیر می بینید.

V_{S2}	V_{S1}	V_{OUT}
0V	0V	**0V**
0V	5V	**4.3V**
5V	0V	**4.3V**
5V	5V	**4.3V**

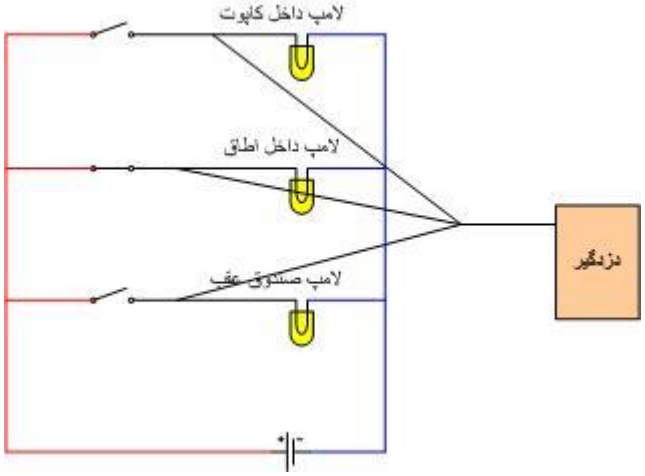
جدول ۵-۱: مقادیر خروجی، در مدار OR که با استفاده از دیود درست کرده ایم

نمونه ای کاربردی برای مدار OR

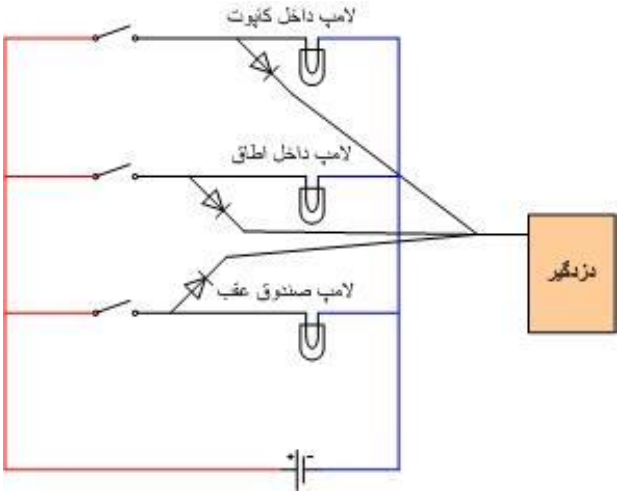
فرض کنید بخواهیم برای اتومبیلی سیستم دزدگیر بگذاریم به گونه ای که اگر در اتومبیل و یا در صندوق عقب و یا درب کاپوت آن باز شد، آژیری به صدا درآید. قبل از نصب دزدگیر، به طور معمول مدار اتومبیل به این صورت است که چراغهای داخل اتاق با کلیدهای زیر در سری شده که هرگاه دری باز میشود چراغ روشن میشود. برای صندوق عقب و کاپوت نیز به همین شکل است. بنابراین شکل کلی چراغهای روشنایی اتومبیل به صورت روبرو است.



ما می خواهیم که هر وقت هر یک از درها باز شد دزدگیر فعال شود. یک راه حل این است که خروجی همه این کلیدها را به دزدگیر متصل کنیم. (شکل روبرو) اما در این حالت، هر موقع که دری باز شود همه چراغهای داخل اتومبیل و صندوق عقب و کاپوت روشن می شود. در حالی که بهتر است در هر زمان فقط چراغ مربوطه روشن شود و دلیلی ندارد که موقع باز کردن در صندوق عقب، چراغ داخل اتومبیل روشن گردد.

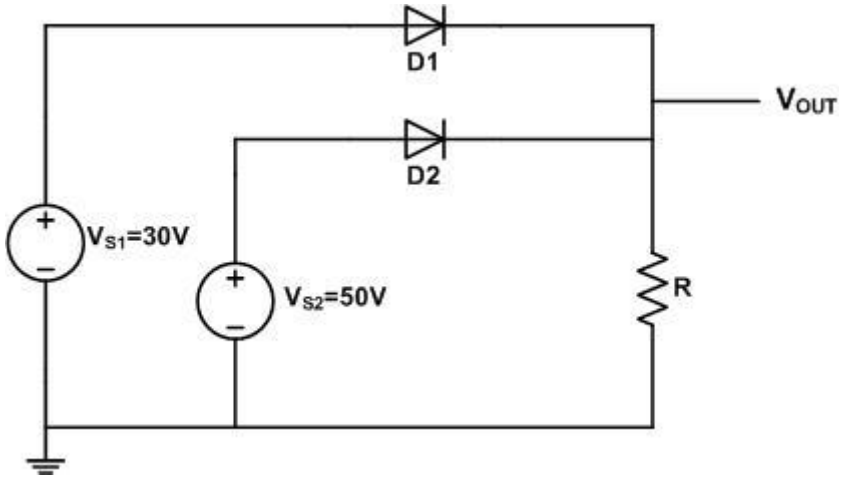


راه حل مناسب این است که با استفاده از سه تا دیود، مداری به شکل زیر ببندیم تا هر گاه دری باز شد، دزدگیر فعال شود، در حالی که هر یک از لامپها به طور مستقل روشن و خاموش شوند.

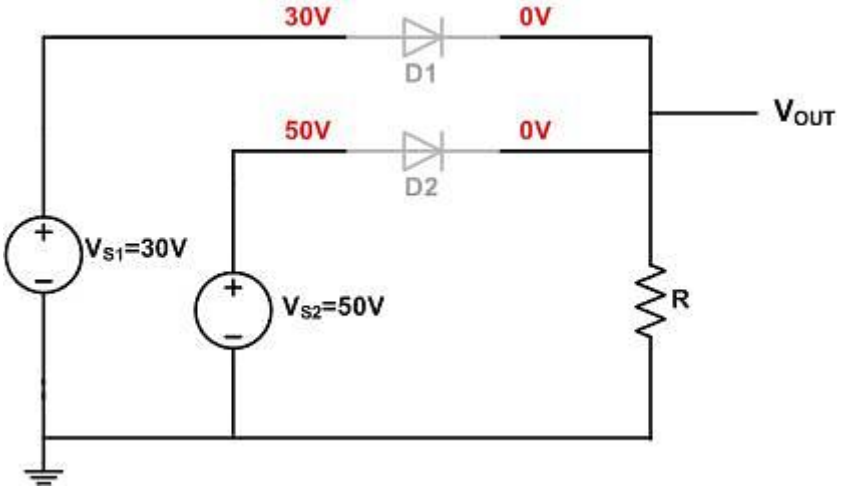


ماکسیمم گیری

فرض کنید مداری به شکل زیر داریم و می خواهیم ببینیم که ولتاژ خروجی آن چند ولت است.

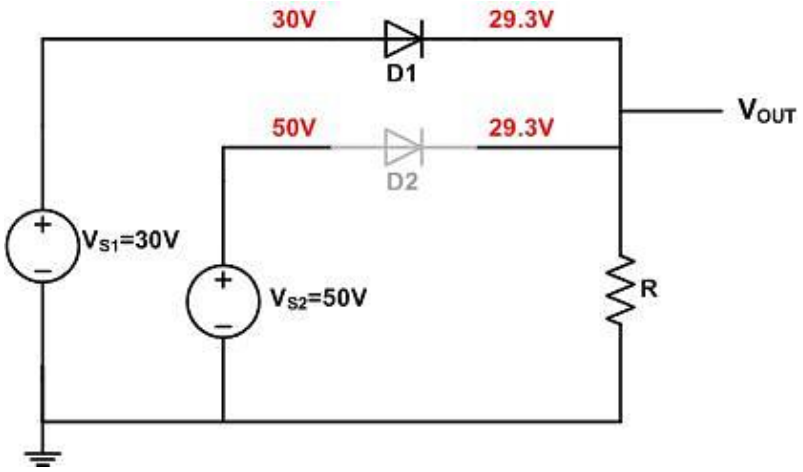


طبق روش برهان خلف، ابتدا فرض می کنیم که همه دیودها خاموش باشند که مدار به شکل زیر می شود.

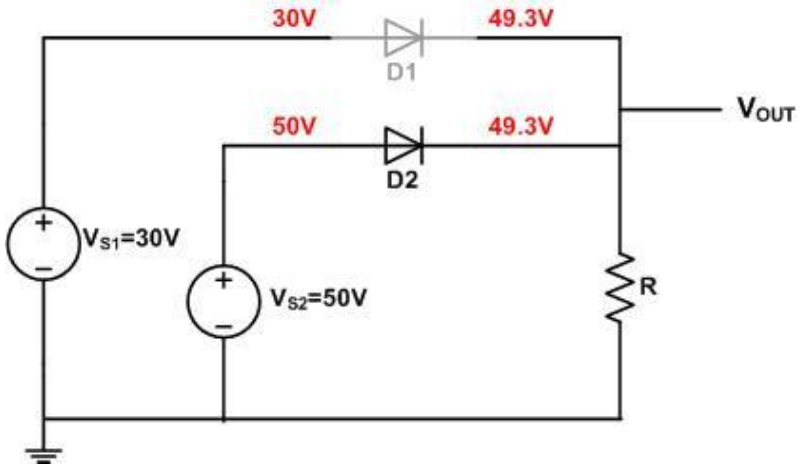


در شکل فوق، ولتاژ سر آند دیود D1 به اندازه ۳۰ ولت بیش از سر کاتد آن است و ولتاژ کاتد دیود D2 به اندازه ۵۰ ولت بیش از آند می باشد. پس فرض خاموش بودن دیودها نمی تواند درست باشد و حتما یکی از دیودها روشن است. حال بررسی می کنیم که کدام دیود روشن است.

ابتدا فرض می کنیم که دیود D1 روشن و دیود D2 خاموش باشد. با توجه به روشن بودن D1، ولتاژ 0.7 بر روی آن می افتد و بنابراین V_{OUT} برابر 29.3 ولت می‌شود و ولتاژهای مدار به شکل زیر می شود.



با توجه به اینکه در دیود D2، ولتاژ سر آند آن 50 ولت و سر کاتد آن 29.3 ولت است، پس دیود D2 می بایست روشن باشد و این مخالف فرض خاموش بودن آن است.

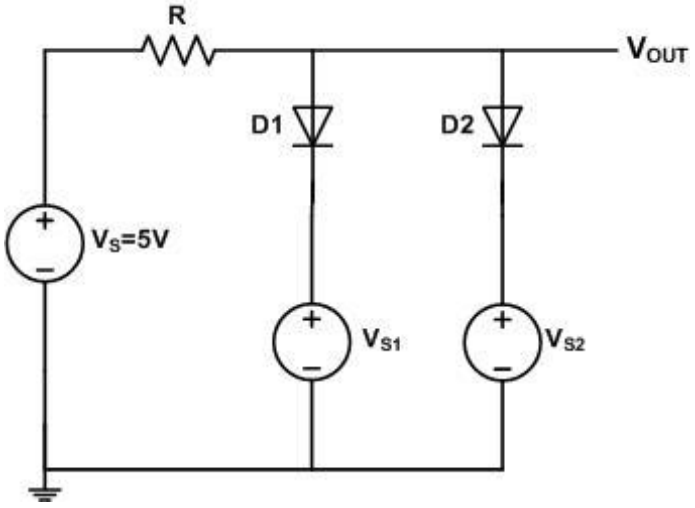


اگر دیود D2 روشن باشد، ولتاژ V_{OUT} برابر 49.3 ولت می شود که در این حالت، در دیود D1، ولتاژ سر آند آن ۳۰ ولت و ولتاژ سر کاتد آن 49.3 ولت خواهد بود و بنابراین D1 خاموش است. به عبارت دیگر در این مدار روشن شدن دیود D2 باعث میشود که ولتاژ V_{OUT} به 49.3 ولت برسد و در این حالت دیود D1 خاموش است.

به طور کلی اگر تعدادی دیود را به صورت فوق ببندیم و سر آند آنها را به منابع ولتاژی متصل کنیم، هر کدام از منبع ولتاژ که دارای ولتاژ بیشتری باشد، دیود مربوط به آن روشن میشود و ولتاژ خروجی به اندازه 0.7 کمتر از ولتاژ منبع ولتاژ خواهد بود. اگر مقادیر ولتاژ زیاد باشند می توانیم از ولتاژ 0.7 ولت چشم پوشی کنیم و بگوییم که بزرگترین ولتاژ به خروجی منتقل شده است و این مدار را مدار ماکسیمم گیر بنامیم.

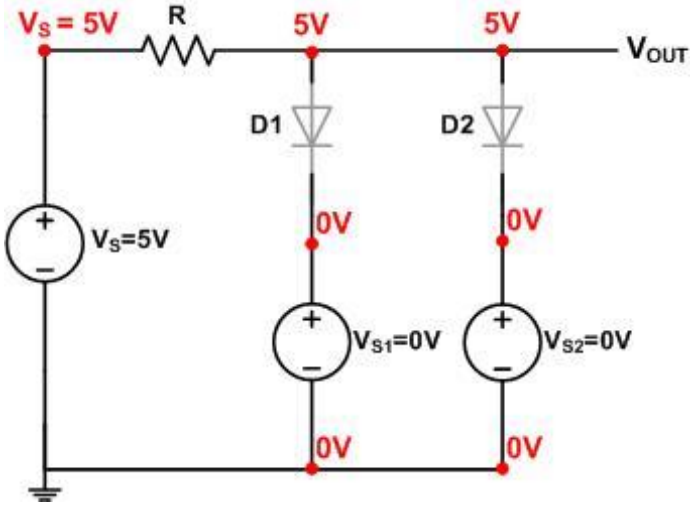
۲ . *مدار AND کننده و مینیمم گیر*

فرض کنید، منابع ولتاژ V_{S1} و V_{S2} منابعی 5 ولت باشند. می خواهیم ببینیم که هنگامی که هر یک از این منابع روشن و یا خاموش است مقدار ولتاژ در V_{OUT} چقدر است.



الف. هنگامی که هر دو منبع خاموش باشند (ولتاژ آنها صفر ولت باشد)

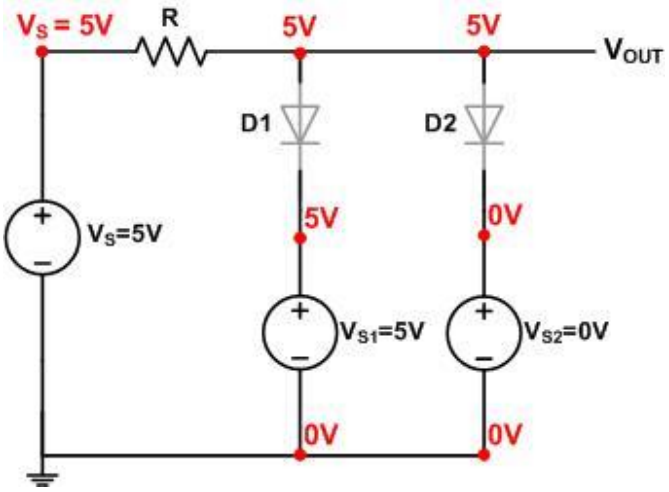
طبق روش برهان خلف فرض می کنیم که دیودها خاموش باشند و آنها را از مدار حذف می کنیم. در این حالت، ولتاژ دو سر دیودها به صورت زیر خواهد بود.



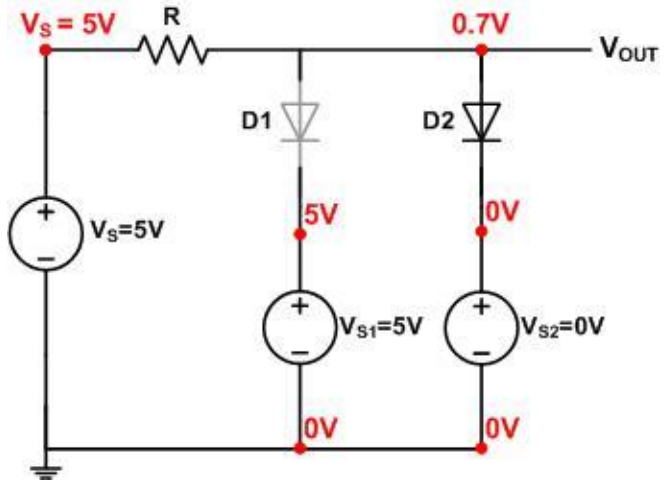
در شکل فوق، ولتاژ سر آند دیودها از سر کاتد آنها ۵ ولت بیشتر است. پس فرض خاموش بودن همه دیودها نمی تواند درست باشد. بنابراین بررسی می کنیم که کدام دیود روشن است. اگر D1 روشن باشد ولتاژ سر آند آن 0.7 ولت بیش از سر کاتد آن خواهد شد و بنابراین V_{OUT} برابر با 0.7 ولت می شود که در این شرایط D2 نیز روشن می شود. اگر D2 روشن شود نیز V_{OUT} برابر با 0.7 ولت می شود. پس نتیجه می گیریم که هر دو دیود در این شرایط روشن است.

ب. هنگامی که منبع V_{S1} برابر ۵ ولت و منبع V_{S2} خاموش است

به روش برهان خلف عمل می کنیم و فرض می کنیم که دیودها خاموش باشند و آنها را از مدار حذف می کنیم که در این صورت مدار به شکل زیر می شود:

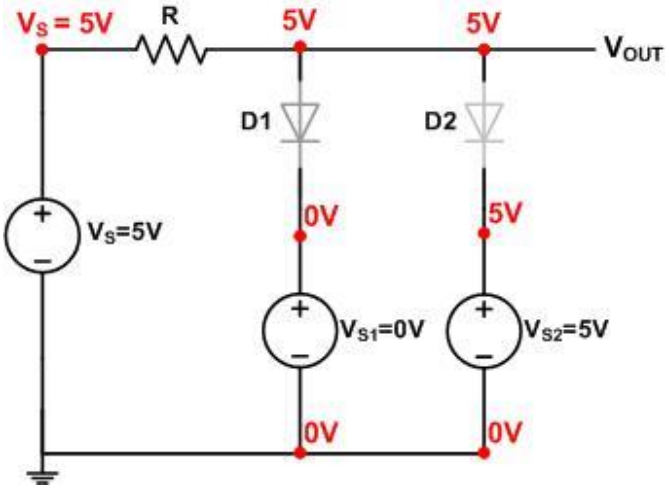


در شکل فوق ولتاژ سر آند دیود D2، 5 ولت بیشتر از سر کاتد آن است. پس فرض خاموش بودن D2 نادرست است و D2 روشن است. اگر دیود D2 روشن باشد، ولتاژ خروجی برابر 0.7 ولت می‌شود.



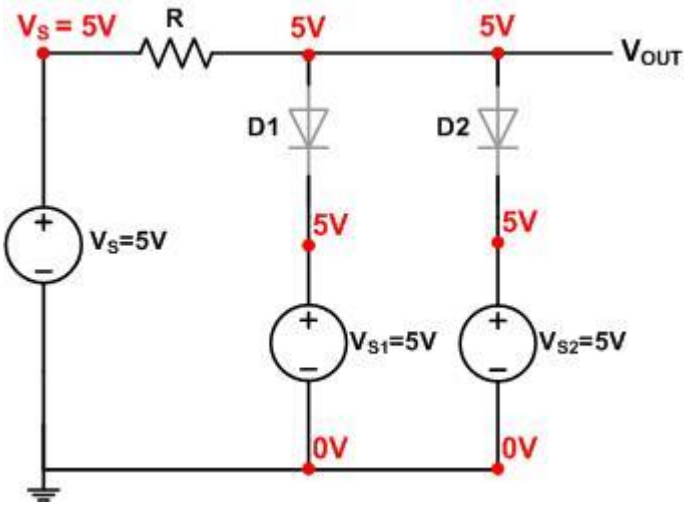
ج. هنگامی که منبع V_{S2} برابر 5 ولت و منبع V_{S1} خاموش است

به روش برهان خلف عمل می کنیم و فرض می کنیم که دیودها خاموش باشند و آنها را از مدار حذف می کنیم که در این صورت مدار به شکل زیر می شود:



در شکل فوق ولتاژ سر آند دیود D1، ۵ ولت بیشتر از سر کاتد آن است. پس فرض خاموش بودن D1 نادرست است و D1 روشن است. اگر دیود D1 روشن باشد، ولتاژ خروجی برابر 0.7 ولت میشود.

د. هنگامی که هر دو منبع V_{S1} و V_{S2} روشن باشند



طبق روش برهان خلف، ابتدا فرض می کنیم که هر دو دیود خاموش باشند که مدار به صورت زیر می شود:

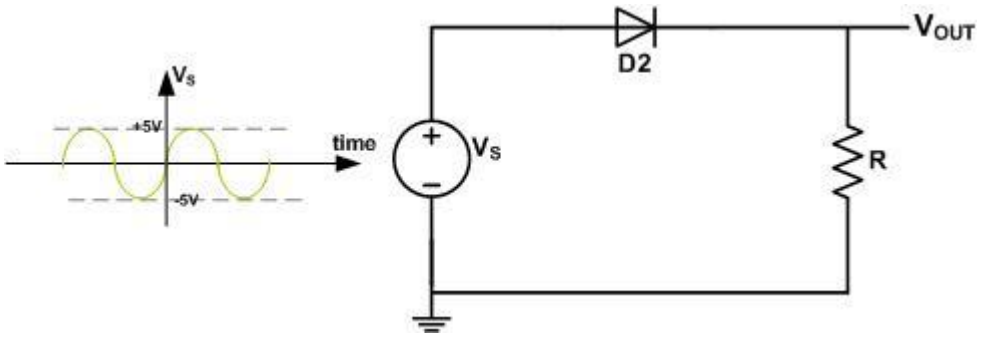
در شکل فوق ولتاژ دو سر دیودها صفر ولت است. پس فرض خاموش بودن دیودها درست است و ولتاژ خروجی ۵ ولت است.

V_{S2}	V_{S1}	V_{OUT}
0V	0V	**0.7V**
0V	5V	**0.7V**
5V	0V	**0.7V**
5V	5V	**5V**

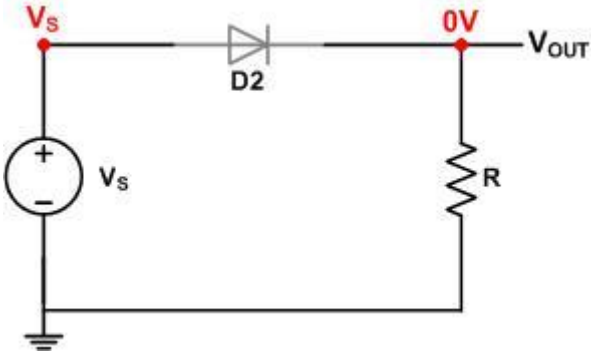
جدول ۵-۲: مقادیر خروجی، در مدار AND که با استفاده از دیود ساخته شده باشد

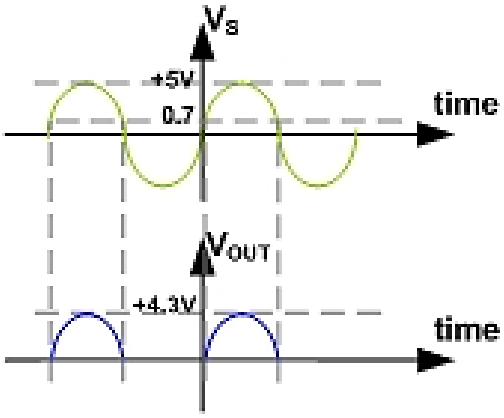
۳. یکسوساز نیم موج

همان طوری که در شکل زیر نمایش داده شده، ولتاژ تولید شده توسط منبع ولتاژ به شکل سینوسی است، بررسی کنید که ولتاژ خروجی به چه شکل است.



اگر دیود خاموش باشد، ولتاژها به صورت زیر خواهند بود.

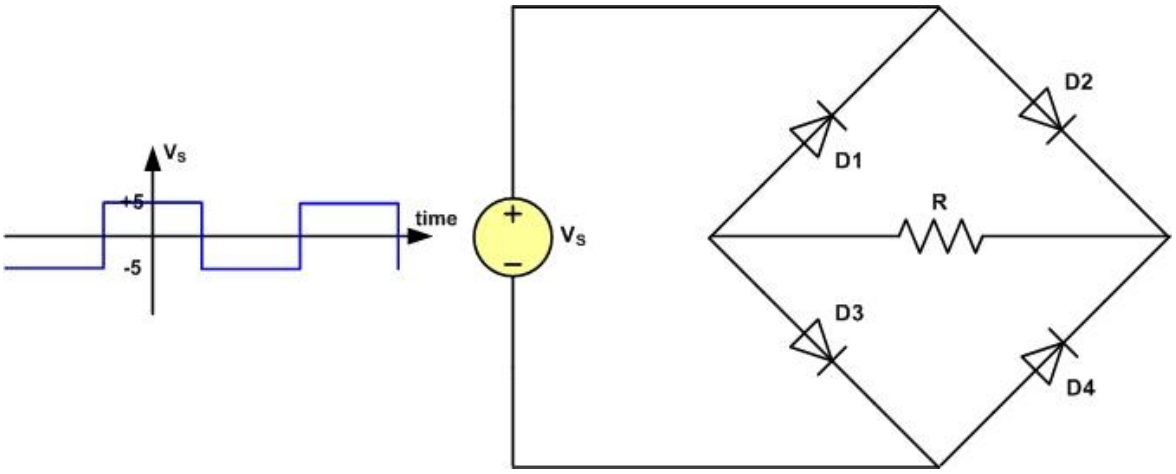




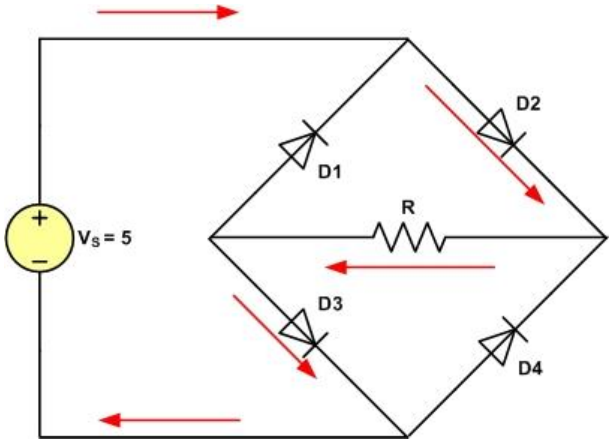
تا مادامی که ولتاژ سر آند دیود 0.7 از سر کاتد آن تجاوز نکند، دیود همچنان خاموش است اما به مجرد اینکه ولتاژ آند بیشتر از 0.7 از سر کاتد تجاوز کند، دیود روشن می‌شود. هنگامی که دیود روشن شود، به اندازه 0.7 ولت بر روی دیود افت می کند. بنابراین ولتاژ خروجی برابر با $V_S - 0.7$ می‌شود.

۴ . یکسوساز تمام موج

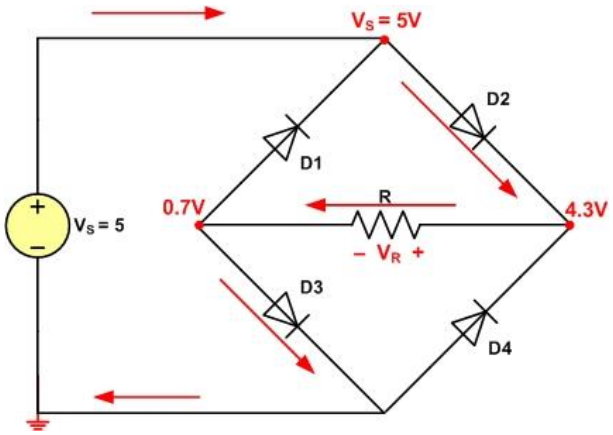
در مدار زیر می خواهیم شکل ولتاژ دو سر مقاومت را رسم کنیم.



ابتدا بررسی می کنیم که هنگامی که ولتاژ منبع ولتاژ، 5 ولت باشد، ولتاژ دو سر مقاومت به چه شکل است. می دانیم که جهت جریان از قطب مثبت باتری به طرف قطب منفی است. تنها مسیری که می توانیم از قطب مثبت به قطب منفی برسیم به شکل زیر است و بنابراین دیودهای D1 و D4 حتما خاموش هستند و دیودهای D2 و D3 می توانند روشن باشند مشروط بر این که ولتاژ دو سر آنها به 0.7 برسد.



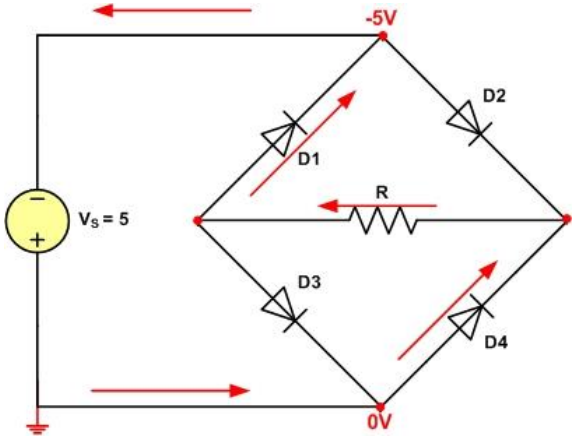
بنابراین فرض می کنیم که دیودها روشن هستند و بررسی می کنیم که آیا به تضادی برخورد می کنیم یا نه.



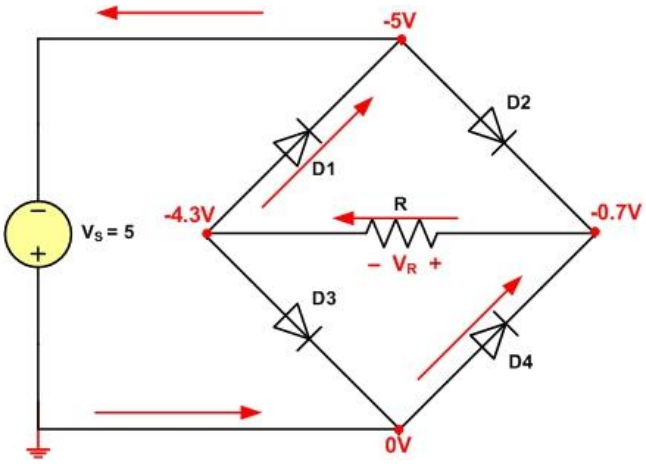
در مدار فوق ولتاژ سر سمت راست مقاومت از ولتاژ سمت چپ آن بیشتر است که با جهت جریان فرض شده برای مقاومت هماهنگی دارد. ولتاژ 0.7 ولت نیز برای دیودها فراهم شده و از سایر جهات نیز به تناقضی برخورد نمی کنیم، پس فرض روشن بودن دیودهای D2 و D3 درست است. در این حالت ولتاژی دو سر مقاومت برابر است با:

$$V_R = 4.3 - 0.7 = 3.6$$

حال مدار را برای حالتی که ولتاژ منبع تغذیه 5V- است بررسی می کنیم. در این حالت نیز جهت جریان می بایست از قطب مثبت باتری به طرف قطب منفی باشد:



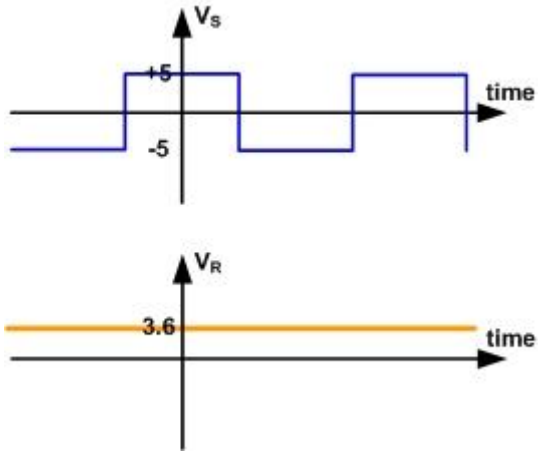
در این حالت دیودهای D1 و D4 می توانند روشن باشند:



در شکل فوق ولتاژ دو سر مقاومت برابر است با:

$$V_R = -0.7 - (-4.3) = 3.6\ V$$

بنابراین شکل موج ولتاژ دو سر مقاومت به صورت زیر است:

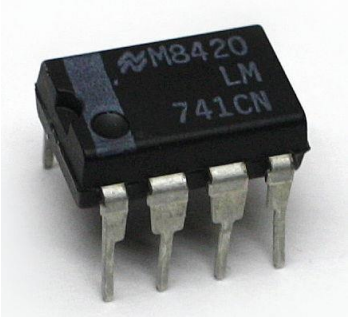


همانطور که در فوق دیدیم همیشه ولتاژ سر سمت راست مقاومت بیشتر از سر سمت چپ آن است. فرقی نمی کند که ولتاژ منبع ولتاژ، مثبت یا منفی باشد. بنابراین می توانیم به مدار فوق، موجی که مقدار آن بین مثبت و منفی تغییر می کند را بدهیم و در خروجی (در دو سر مقاومت) ولتاژی مثبت را دریافت کنیم. البته این مدار به اندازه 1.4 از دامنه سیگنال کم می‌کند (زیرا می بایست دو تا دیود روشن شوند.) مثلا در مثال فوق به ازای 5 ولت ورودی، به اندازه 3.6 ولت در خروجی دریافت کرده ایم.

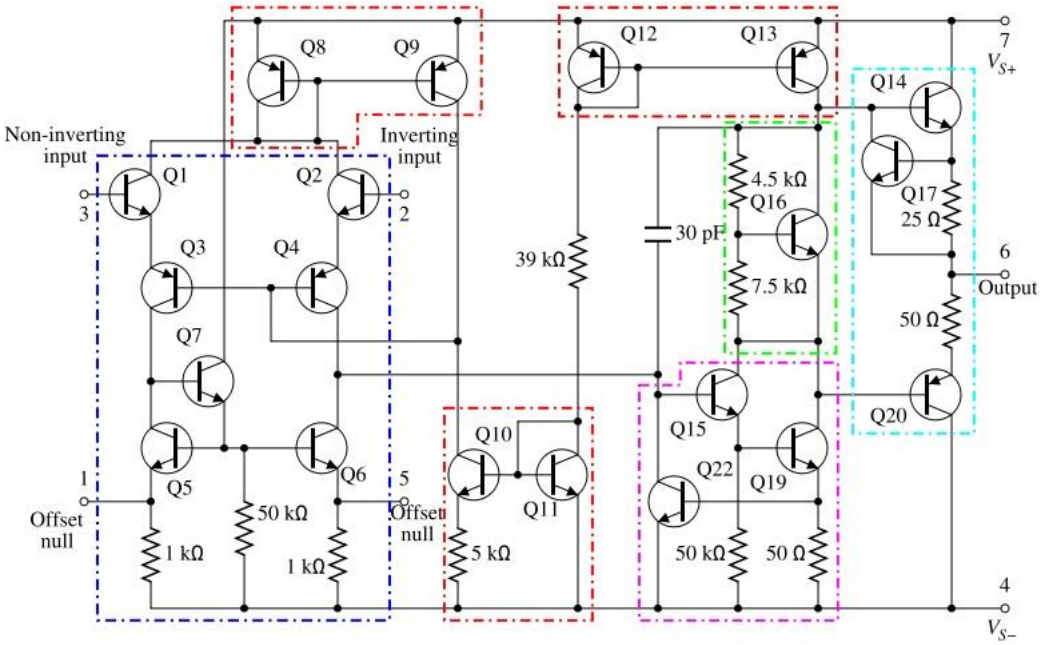
فصل ششم: تقویت کننده های عملیاتی (Op-Amp)

بخش ۶-۱: معرفی Op-Amp و کاربردهای آن

Op-Amp (Operational Amplifier) یکی از پر کاربردترین آی سی های دنیای آنالوگ است که خود از تعداد زیادی ترانزیستور تشکیل شده است. در شکل ٦-١، عکس یک LM741 را می بینید که یک آی سی Op-Amp است. و در شکل ٦-٢، شکل مدار داخلی آن را می بینید.



شکل ۶-۱: عکس یک LM741



شکل ۶-۲: مدار داخلی یک اپ امپ

کاربرد Op-Amp

فرض کنید که بخواهیم رباتی طراحی کنیم. بسیاری از سنسورها آنالوگ هستند و می بایست که سیگنال آنها تقویت شود و تغییر شکل داده شوند (یا همانطور که در مقاله اختیاری آخر فصل یک دیدیم می بایست بر روی سیگنال خروجی آنها سیگنال کاندیشنینگ انجام گیرد) تا بتوان از سنسورها استفاده کرد که اکثر این کارها معمولا با استفاده از Op-Amp انجام می گیرید. برخی از کاربردهای Op-Amp عبارتند از:

١. تقویت کردن

٢. جمع و تفریق سیگنالها

۳. تبدیل سیگنالها از نوعی به نوع دیگر: مثلا تبدیل جریان به ولتاژ، مقاومت به ولتاژ و غیره

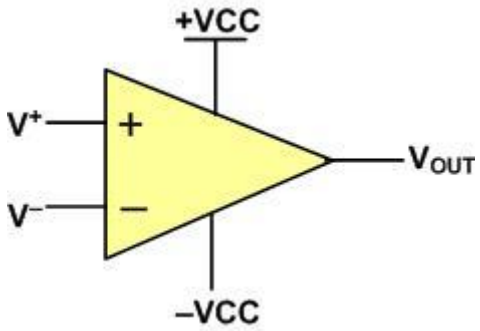
۴. تغییر شکل سیگنالها: فیلتر کردن و یا خطی کردن سیگنال

۵. انتگرال و مشتق و لگاریتم گرفتن از سیگنال

۶. اشمیت تریگر

آشنایی با پایه های Op-Amp و رفتار آن

شکل نمادین اپ امپ و پایه های آن را در شکل ٦-٣ می بینید. در زیر با پایه های آن آشنا می شوید:



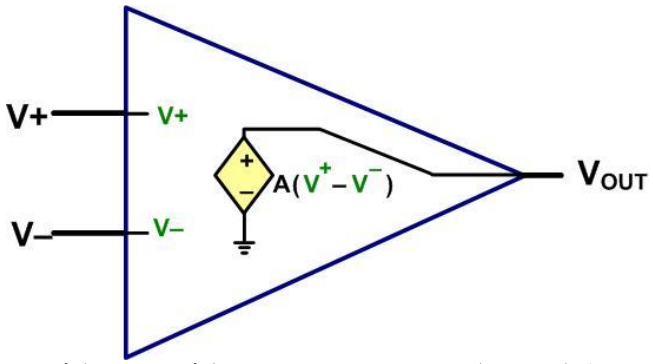
شکل ۶-۳: اپ امپ و پایه های آن

پایه های تغذیه (V_{CC}+ و V_{CC}–): آی سی اپ امپ، همانند هر آی سی دیگری برای اینکه کار کند نیاز به منبع تغذیه دارد که انرژی خود را از آن تامین میکند. پایه های تغذیه در اپ امپ، V_{CC}+ و V_{CC}– نام دارند که ولتاژی که به پایه V_{CC}+ متصل میشود می بایست از ولتاژی که به پایه V_{CC}– متصل میشود، بیشتر باشد. معمولا ولتاژی که به پایه های V_{CC}+ و V_{CC}– متصل میشود قرینه یکدیگرند. مثلا هنگامی که به پایه V_{CC}+، ولتاژ ۵V+ داده می شود، به پایه V_{CC}–، ولتاژ ۵V– داده می شود. اما هیچ لزومی به متقارن بودن ولتاژها وجود ندارد و می توانیم آنها را به هر ولتاژ دلخواهی متصل کنیم. جلوتر، در همین بخش، تاثیر اندازه ولتاژ تغذیه را بر عملکرد اپ امپ خواهیم دید.

پایه های ورودی: V^+ و V^- پایه های ورودی اپ امپ را تشکیل می دهند و رفتار اپ امپ به گونه ای است که تفاضل ولتاژ V^+ و V^- را به پایه خروجی اعمال می کند. یعنی رابطه زیر:

$$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-)$$

که در رابطه فوق، A، ضریب ثابتی است که بسته به شماره آی سی، ممکن است از ۳۰۰ هزار تا چندین میلیون باشد. به عبارت دیگر، اپ امپ، در حکم تقویت کننده ای است که تفاضل سیگنالهای ورودی را A برابر می کند و به خروجی اعمال می کند. بنابراین مدار داخلی اپ امپ را می توانیم به صورت شکل ٦-٤ مدل کنیم.



شکل ۶-۴: مدل کردن اپ امپ به صورت منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ

A را Gain یا ضریب تقویت نامیده اند و البته در نوشته های فارسی به بهره تقویت و یا بهره ولتاژ نیز ترجمه شده است. مثال ٦-١ را ببینید.

مثال ١

در یک نوع Op-Amp که LM741 نام دارد، اندازه A، 300 هزار است. در هر یک از حالات زیر، ولتاژ خروجی را حساب کنید.
الف) $V^+ = 5\mu V$ و $V^- = 4\mu V$
ب) $V^+ = 6\mu V$ و $V^- = 6\mu V$
پ) $V^+ = 2\mu V$ و $V^- = -3\mu V$
ت) $V^+ = -3\mu V$ و $V^- = +1\mu V$

پاسخ:

الف)

$$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) = 300{,}000 \times (5\mu V - 4\mu V) = 300{,}000 \times 10^{-6} = 0.3V$$

ب)

$$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) = 300{,}000 \times (6\mu V - 6\mu V) = 300{,}000 \times 0 = 0V$$

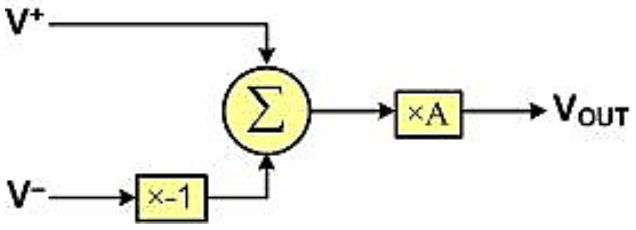
پ)

$$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) = 300{,}000 \times (2\mu V - -3\mu V) = 300{,}000 \times 5\mu V = 1.5V$$

ت)

$$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) = 300{,}000 \times (-3\mu V - 1\mu V) = 300{,}000 \times -4\mu V = -1.2V$$

همانطوری که در مثال فوق نیز دیدیم، اپ امپ، تفاضل بین پایه های V^+ و V^- را تقویت می کند و در خروجی اعمال می کند. رفتار اپ امپ را می توانیم با دیاگرام زیر مدل سازی کنیم.

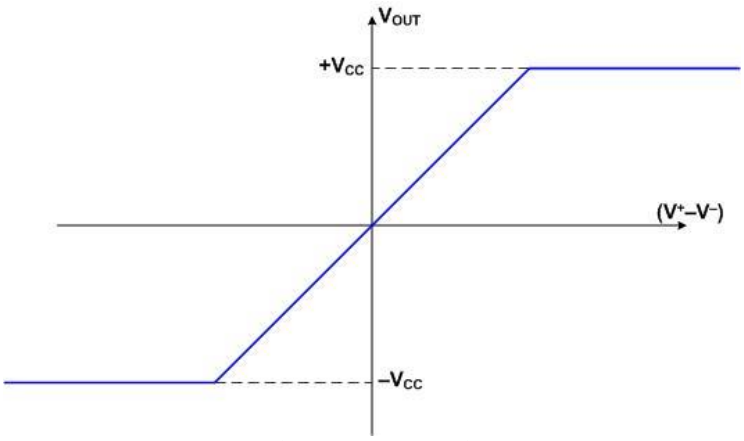


شکل ۶-۵: مدل ریاضی اپ امپ

حال این سوال مطرح می شود که آیا اگر تفاضل سیگنالهای ورودی در حد ١ ولت باشد، در خروجی چه سیگنالی خواهیم داشت. آیا اپ امپ ولتاژی در حد ٣٠٠,٠٠٠ ولت را در خروجی ایجاد خواهد کرد؟

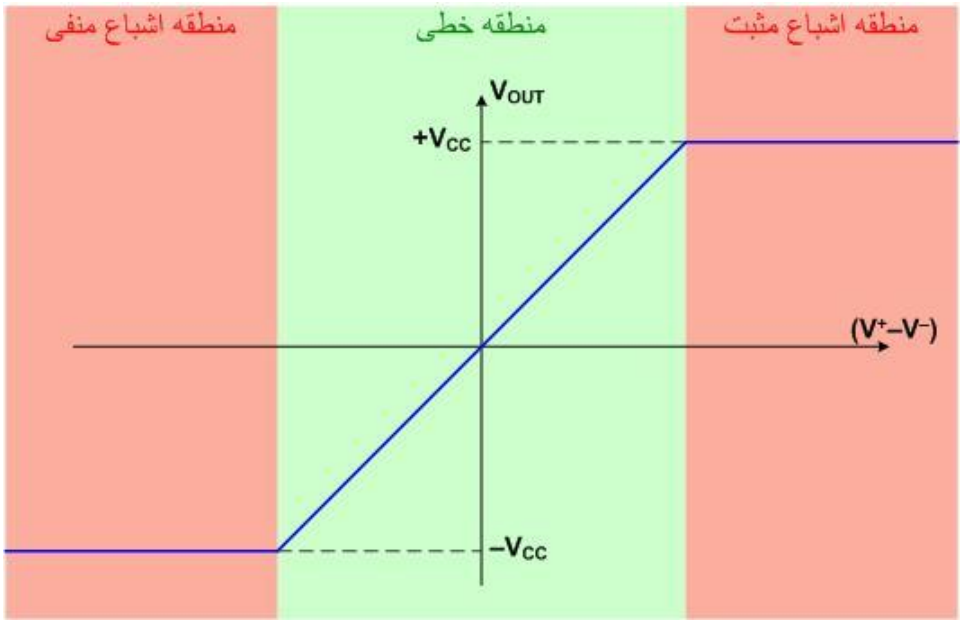
پاسخ این است که حداکثر ولتاژی که اپ امپ می تواند به پایه خروجی اعمال کند، به اندازه ولتاژ تغذیه مثبت ($+V_{CC}$) و حداقل ولتاژی که می تواند در خروجی ایجاد کند، به اندازه ولتاژ تغذیه منفی ($-V_{CC}$) است. مثلا اگر $+V_{CC}$ به

5V+ و به 4V– متصل شود، حداکثر ولتاژی که در خروجی اپ امپ، ایجاد می شود، 5V+ و حداقل 4V– خواهد بود. بنابراین رابطه بین تفاضل ولتاژ پایه های ورودی اپ امپ و ولتاژ پایه خروجی اپ امپ به شکل زیر خواهد بود.



شکل ۶-۶: نمودار ولتاژ خروجی نسبت به ولتاژهای ورودی در اپ امپ

هنگامی که اپ امپ، سیگنال ورودی را A برابر تقویت می کند، اصطلاحاً در منطقه خطی قرار دارد. هنگامی که تفاضل ولتاژ ورودی به حدی زیاد می شود که ولتاژ خروجی به $V_{CC}+$ می رسد می گوییم که اپ امپ وارد اشباع مثبت شده است و هنگامی که ولتاژ خروجی به $V_{CC}-$ می رسد می گوییم که اپ امپ وارد اشباع منفی شده. شکل زیر را ببینید و سپس مثال ۲ را ملاحظه کنید.



شکل ۶-۷: نامگذاری مناطق کاری نمودار اپ امپ

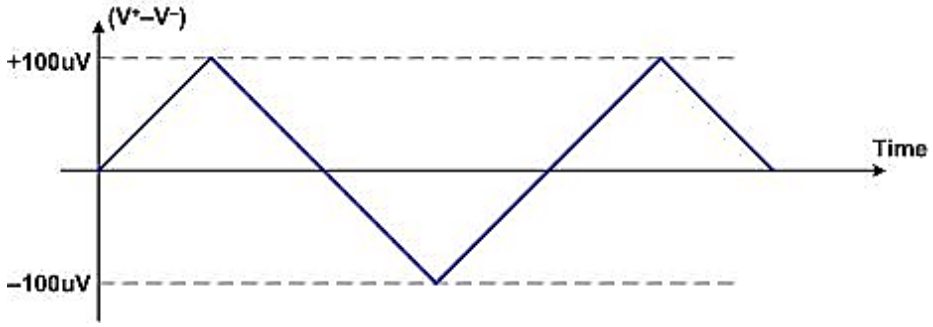
مثال ۶-۲

در یک Op-Amp، A=300,000 و پایه $V_{CC}+$ به 15V و پایه $V_{CC}-$ به 12V– متصل شده است. ولتاژ خروجی را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید:

الف) $V^+ = 4mV$ و $V^- = 3mV$

ب) $V^+ = 0V$ و $V^- = +2mV$

پ) اگر تفاضل ولتاژ پایه های +V و –V به شکل زیر باشد، شکل موج خروجی را رسم کنید.



پاسخ:

الف)

$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) = 300{,}000 \times (4mV - 3mV) = 300{,}000 \times 1mV = 300V$

با توجه به اینکه ۳۰۰ ولت از ولتاژ تغذیه مثبت بیشتر است، پس در عمل در خروجی Op-Amp، ولتاژ $V_{CC}+$ یعنی 15V+ ظاهر می شود.

ب)

$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) = 300{,}000 \times (0V - 2mV) = -600V$

با توجه به اینکه 600V– از ولتاژ تغذیه منفی کوچکتر است، پس ولتاژ خروجی Op-Amp، برابر $V_{CC}-$ یعنی 12V– می شود.

پ) تا مادامی که ولتاژ خروجی Op-Amp بزرگتر از $V_{CC}-$ و کوچکتر از $V_{CC}+$ است، Op-Amp به صورت خطی تقویت میکند. بررسی می کنیم که به ازای چه مقادیری از ورودی، خروجی وارد اشباع می شود:

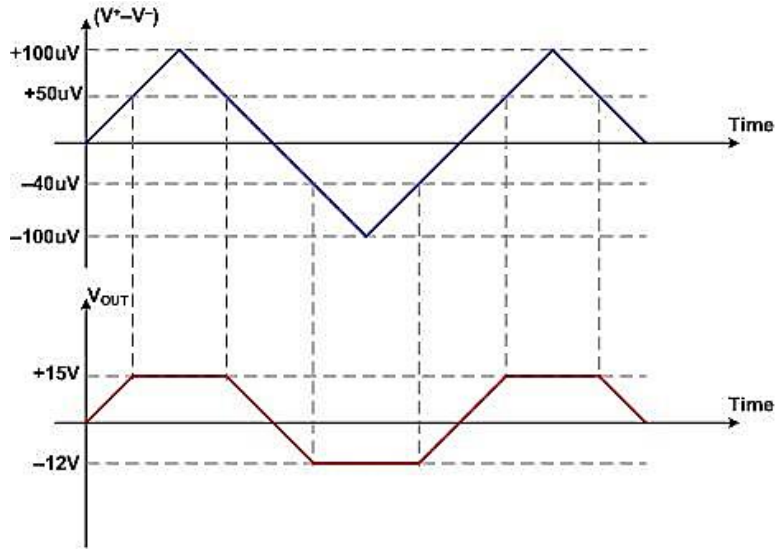
$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) \rightarrow 15V = 300{,}000 \times (V^+ - V^-) \rightarrow (V^+ - V^-) = 50\mu V$

پس اگر تفاضل ورودیها بیش از 50µV شود، Op-Amp وارد اشباع مثبت میشود و ولتاژ خروجی برابر $V_{CC}+$ می شود.

$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-) \rightarrow -12V = 300{,}000 \times (V^+ - V^-) \rightarrow (V^+ - V^-) = -40\mu V$

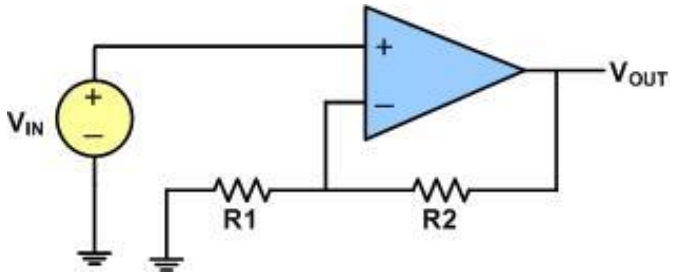
بنابراین اگر تفاضل ورودیها کمتر از 40µV– شود، Op-Amp وارد اشباع منفی میشود و ولتاژ خروجی برابر VCC– می شود.

پس شکل موج خروجی به صورت زیر خواهد شد:



مدار تقویت کننده وارون نکن

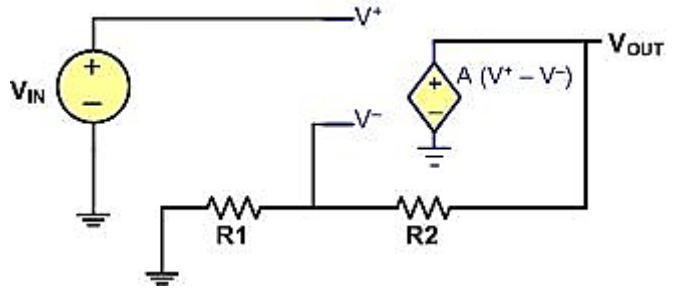
در مثالهای فوق دیدیم که اپ امپ، سیگنالهایی در حد میکروولت را تقویت می کند و سیگنالهایی در حد ولت در خروجی ایجاد می کند. اما ما در بسیاری از کاربردها نیازی به چنین ضریب تقویب بزرگی نداریم و در عین حال مایلیم که بتوانیم ضریب تقویت را خودمان مشخص کنیم. برای این مقصود می توانیم از مدار زیر استفاده کنیم.



شکل ۶-۸: مدار تقویت کننده وارون نکن

اما رابطه بین سیگنال ورودی و ولتاژ خروجی در مدار فوق چگونه است؟ و مدار فوق چگونه کار می کند؟

برای اینکه بتوانیم رفتار این مدار را تحلیل کنیم به جای اپ امپ، مدل مدار داخلی آن را به صورت زیر جایگزین می کنیم.



سپس با استفاده از روشهایی که برای تحلیل مدار آموخته ایم، ولتاژ خروجی مدار را به دست می آوریم.

می دانیم که ولتاژ خروجی اپ امپ برابر است با:

$$V_{OUT} = A\,(V^+ - V^-)$$

همچنین در مدار فوق می بینیم که $V^+ = V_{IN}$.

پس فقط کافی است که مقدار V^- را در مدار فوق به دست آوریم تا ولتاژ خروجی مشخص شود. برای به دست آوردن V^-، ولتاژ گره را برای گره V^- می نویسیم:

$$\frac{V^- - V_{OUT}}{R_2} + \frac{V^- - 0}{R_1} = 0 \Rightarrow \frac{R_1 \times V^- - R_1 \times V_{OUT} + R_2 \times V^-}{R_1 \times R_2} = 0 \Rightarrow V^- = \frac{V_{OUT} \times R_2}{R_1 + R_2}$$

البته، با توجه به اینکه سرهای ورودی اپ امپ جریانی از مدار نمی‌کشند، لذا مقاومتهای R۱ و R۲ با هم سری هستند و بنابراین می توانستیم با استفاده از معادله مقسم ولتاژ نیز، ولتاژ گره V^- را به دست آوریم.

حال با جایگزین کردن مقدار V^- و V^+ در معادله مربوط به اپ امپ داریم:

$$V_{OUT} = A \times (V^+ - V^-) = A \times (V_{IN} - \frac{V_{OUT}}{R_1+R_2}) \Rightarrow V_{OUT}\left(1 + \frac{A \times R_2}{R_1+R_2}\right) = A \times V_{IN} \Rightarrow V_{OUT} = \frac{A \times V_{IN}}{\left(1+\frac{A \times R_2}{R_1+R_2}\right)}$$

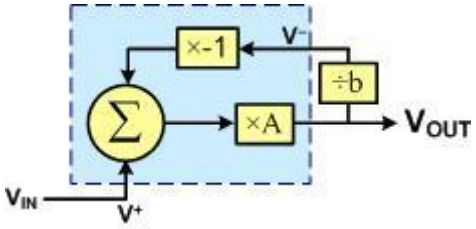
در عبارت فوق، مقدار A متجاوز از ۳۰۰,۰۰۰ است و بنابراین مقدار عدد ۱، در مقایسه با $\frac{A}{R_1+R_2}$ قابل چشم پوشی است و قابل حذف است. پس عبارت فوق را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\Rightarrow V_{OUT} = \frac{A \times V_{IN}}{\left(1 + \frac{A \times R_2}{R_1 + R_2}\right)} \approx \frac{A \times V_{IN}}{\left(\frac{A \times R_2}{R_1 + R_2}\right)} = V_{IN} \times (\frac{R_1 + R_2}{R_2}) \Rightarrow V_{OUT} = V_{IN} \times (\frac{R_1 + R_2}{R_2})$$

بنابراین همان طوری که در رابطه نهایی می بینید، مدار فوق به نسبت مقاومتهای R1 و R2، سیگنال ورودی را تقویت می کند. بنابراین با استفاده از مقاومتهای مناسب و اپ امپ می توانیم مدار تقویت کننده ای بسازیم که میزان تقویت کردن آن، به مقدار مقاومتها بستگی دارد. مثلا اگر مقاومت R2، برابر 99K و مقاومت R1، 1K باشد، سیگنال را ۱۰۰ برابر تقویت میکند. همچنین در صورت تمایل می توانیم به جای مقاومتهای ثابت، از مقاومت متغیر (ولوم) استفاده کنیم تا بتوانیم میزان تقویت سیگنال را تنظیم کنیم.

حال این سوال پیش می آید که برای ضریب تقویت ۳۰۰,۰۰۰، چه اتفاقی افتاده و چگونه است که میزان تقویت مدار کاهش یافته است.

برای این که رفتار این مدار را تحلیل کنیم، دیاگرام معادل مدار فوق را رسم می کنیم.



شکل ۶-۹: رفتار مدار تقویت کننده وارون نکن

همان طوری که در دیاگرام فوق می بینیم، هرگاه ولتاژ V_{IN} زیاد شود، ولتاژ سر مثبت ورودی بالا می رود و بنابراین ولتاژ خروجی اپ امپ، بالا می رود. اما وجود مقاومت بین سر خروجی و سر منفی ورودی، باعث می شود که سر منفی ورودی بالا برود و بالا رفتن سر منفی خروجی باعث می شود که ولتاژ خروجی افت کند. به عبارت دیگر، با وجود اینکه اپ امپ، سیگنال ورودی را ۳۰۰,۰۰۰ برابر می کند، اما از آنجایی که با بالا رفتن سر مثبت ورودی، سر منفی ورودی نیز بالا می رود، تفاضل ولتاژ دو سر ورودی کمتر از حالتی است که سر منفی به زمین متصل است و بنابراین سیگنال کوچکتری نیز در خروجی ظاهر می شود. با اینکه این موضوع ملموس تر شود، تصور کنید که بین پایه های V+ و V- ورودی اپ امپ، کشی قرار دارد که به تناسب طول این کش ولتاژی در خروجی اپ امپ ظاهر می شود. ما اگر یک سر کش را به دیوار وصل کنیم و سر دیگر آن را بکشیم، هر چقدر ما بکشیم، ۳۰۰,۰۰۰ برابر آن در خروجی ظاهر می شود. اما اگر سر دوم کش را شخص دیگری در دست بگیرد که در هر راستایی که ما حرکت کنیم، او نیز در همان راستا اما به مقدار کمتر حرکت کند، مقدار کش آمدن کش، کمتر از حالتی خواهد شد که سر دوم کش به دیوار متصل است و بنابراین ولتاژ کمتری نیز در خروجی ظاهر می شود. در این مدار نیز ما با متصل کردن سر منفی ورودی از طریق مقاومت به خروجی باعث شده ایم که سر منفی ورودی، در راستای سر

مثبت ورودی (اما به مقدار کمتر) حرکت کند و بنابراین سیگنالی که در خروجی ظاهر می شود، کمتر از حالتهایی است که سر منفی به زمین محکم شده است.

در کل وجود عنصری بین سر خروجی و سر منفی، باعث می شود که اختلاف دو سر ورودی اپ امپ در حد چندین میکرو ولت باقی بماند و اپ امپ در منطقه خطی قرار بگیرد که این حالت، برای تقویت و انجام عملیات خطی بر روی سیگنالها، ایده آل است. در این حالت، با توجه به اینکه اختلاف پتانسیل بین دو سر ورودی اپ امپ در حد چندین میکرو ولت است و ولتاژهای سایر نقاط مدار در حد ولت است، بنابراین از اختلاف پتانسیل دو سر ورودی اپ امپ می توانیم چشم پوشی کنیم و برای انجام دادن راحت تر محاسبات مدارها، ولتاژ دو سر ورودی را برابر یکدیگر فرض کنیم. به عبارت دیگر، در مواردی که عنصری، سر منفی ورودی اپ امپ را به سر خروجی اپ امپ، وابسته کند، می توانیم با استفاده از دو قاعده زیر که به قواعد طلایی اپ امپ معروفند مدار را تحلیل کنیم:

قواعد طلایی اپ امپ

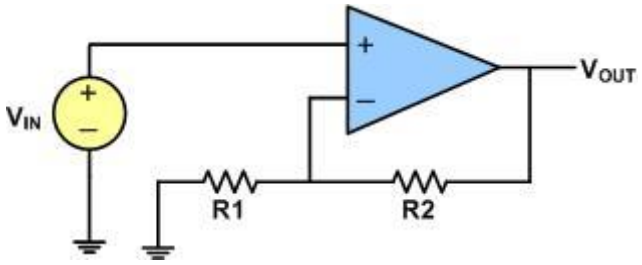
قاعده طلایی یک: جریان وارد شونده به دو سر ورودی اپ امپ، صفر آمپر است. این قاعده در جمیع مدارهای اپ امپ قابل استفاده است.

قاعده طلایی دوم: ولتاژ دو سر ورودی اپ امپ با هم برابر است. این قاعده در مدارهایی کاربرد دارد که از طریق عنصری، سر منفی ورودی اپ امپ با ولتاژ خروجی اپ امپ مرتبط شده باشد. مثلا در مدار تقویت کننده ای که در فوق دیدیم، مقاومت R2 باعث وابسته شدن ولتاژ پایه منفی ورودی به ولتاژ خروجی شده است.

بخش ۶-۲: کاربردهای خطی Op-Amp

مدار تقویت کننده وارون نکن (Non-inverting Amplifier)

در بخش قبل، با مدار تقویت کننده وارون نکن، آشنا شدید. در این بخش به عنوان دست گرمی، خروجی همین مدار را با استفاده از قواعد طلایی اپ امپ محاسبه می کنیم.



شکل ۶-۱۰: مدار تقویت کننده وارون نکن

در مدار فوق با استفاده از قاعده های طلایی می دانیم که $V^+ = V^-$ است. همچنین در شکل فوق می بینیم که $V^+ = V_{IN}$ است. پس از این دو معادله نتیجه می گیریم که $V^- = V^+ = V_{IN}$ است.

اگر معادله ولتاژ گره را برای گره V^+ بنویسیم داریم:

$$\frac{0-V^-}{R_1}+\frac{V_{OUT}-V^-}{R_2}=0\Rightarrow\frac{-R_2V^-+R_1V_{OUT}-R_1V^-}{R_1R_2}=0\Rightarrow-R_2V^-+R_1V_{OUT}-R_1V^-$$
$$=0\Rightarrow(-R_1-R_2)V^-+R_1V_{OUT}=0\Rightarrow R_1V_{OUT}=(R_1+R_2)V^-$$

$$\Rightarrow V_{OUT} = \frac{(R_1 + R_2)V^-}{R_1}$$

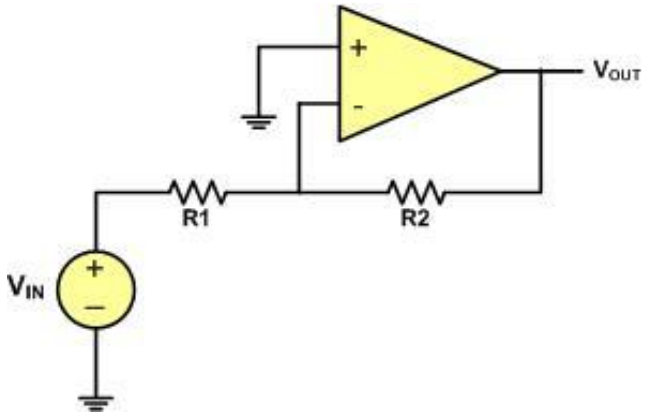
حال در معادله ولتاژ گره ای که برای گره V^- بدست آمده است، مقدار معادله V^- که برابر V_{IN} است را جایگزین می کنیم و داریم:

$$V_{OUT} = \frac{(R_1 + R_2)V^-}{R_1}$$

در فصل ولتاژ گره، گفته بودیم که برای گره هایی که ولتاژ آن را نداریم معادله ولتاژ گره را می نویسیم. بنابراین ممکن است بپرسید که چرا در این مثال، برای گره V_{OUT} معادله ولتاژ گره را نمی‌نویسیم و داریم برای V^+ که ولتاژ آن را می دانیم معادله ولتاژ گره می نویسیم. در مدارهای اپ امپ، ما مقدار جریان سر خروجی اپ امپ را نمی دانیم و بنابراین در مدارهای اپ امپ برای گره V^- معادله ولتاژ گره را می نویسیم.

مدار تقویت کننده وارون کن (Inverting Amplifier)

مدار تقویت کننده وارون کن به شکل زیر است که با استفاده از قواعد طلائی رابطه بین خروجی و ورودی آن را بررسی می کنیم.



شکل ۶-۱۱: مدار تقویت کننده وارون کن

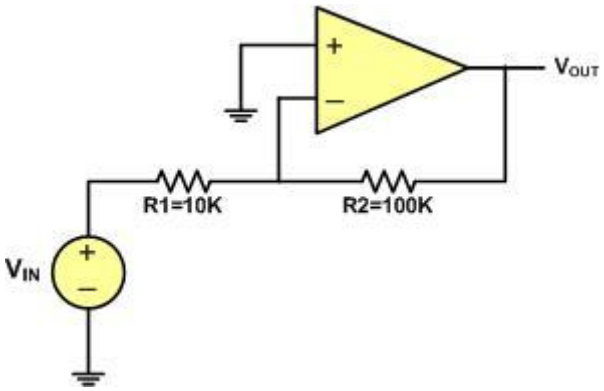
طبق قاعده طلائی $V^+ = V^-$ است. همچنین در شکل فوق می بینیم که $V^+ = 0$ است. بنابراین $V^- = 0$. حال معادله ولتاژ گره را برای گره V^- می نویسیم تا ولتاژ خروجی را به دست آوریم:

$$\frac{V_{IN} - V^+}{R_1} + \frac{V_{OUT} - V^+}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{V_{IN} - 0}{R_1} + \frac{V_{OUT} - 0}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{V_{OUT}}{R_2} = \frac{-V_{IN}}{R_1} \Rightarrow V_{OUT} = \frac{-R_2 V_{IN}}{R_1}$$

همانطوری که می بینید در مقدار فوق به نسبت R1 و R2 سیگنال ورودی را تقویت می کند. نکته قابل توجه علامت منفی موجود در رابطه فوق است. این علامت منفی بدین معنی است که اگر مقدار ورودی، مقداری مثبت باشد، در خروجی ولتاژی منفی خواهیم داشت و برعکس. به همین خاطر است که این مدار را وارون کن می گوییم، در حالی که در مدار قبلی، علامت منفی وجود نداشت و بنابراین ولتاژ خروجی وارون نمی‌شد. مثال زیر را ببینید.

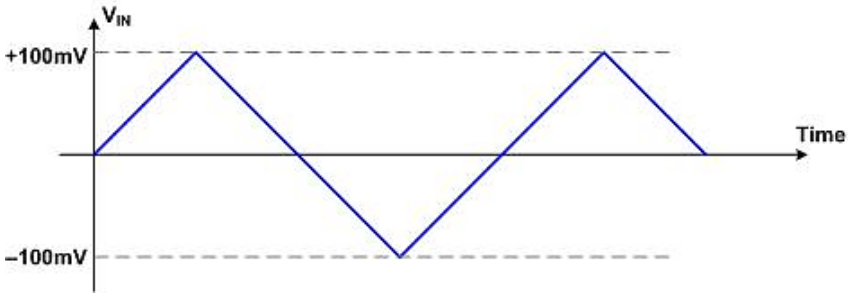
مثال ۶-۳

در مدار زیر حساب کنید که مقدار خروجی، به ازای هر یک از ورودیهای زیر چقدر است.



الف) 0.5 V ب) -0.3V ج) 1.5V

د) موجی به شکل زیر



پاسخ:

با جایگذاری مقدار R1 و R2 در معادله مربوط به تقویت کننده وارون کن داریم:

$$V_{OUT} = \frac{-R_2 V_{IN}}{R_1} = \frac{-100K \times V_{IN}}{10K} = -10V_{IN}$$

بنابراین مقدار خروجی، به ازای هر یک از ورودیها به قرار زیر است:

الف)

$V_{OUT} = -10 \times 0.5 = -5$

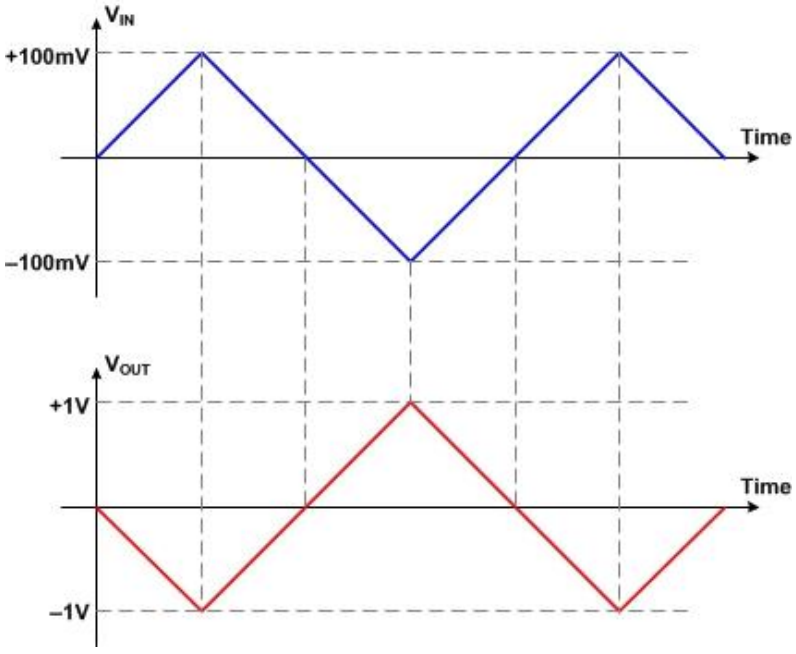
ب)

$V_{OUT} = -10 \times -0.3 = 3$

ج)

$V_{OUT} = -10 \times 1.5 = -15$

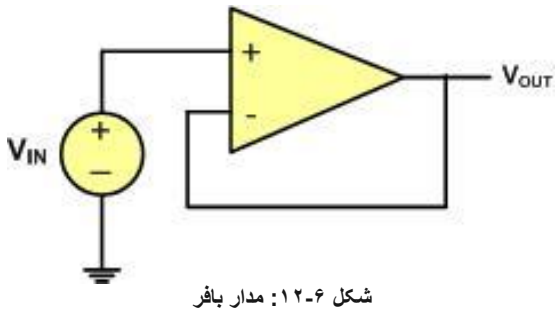
د)



نکته قابل توجه این که ولتاژ خروجی Op-Amp در دامنه ولتاژ های تغذیه (-VCC و +VCC) است. به عبارت دیگر، خروجیهای فوق الذکر به شرطی در خروجی ظاهر می شود که ولتاژ های تغذیه بیشتر از این مقادیر باشد. در غیر این صورت، همانطوری که در بخش اول دیدیم، ولتاژ تغذیه را در خروجی خود خواهد داد.

مدار بافر (Voltage Follower)

به مدار زیر اصطلاحاً، مدار بافر، یا به قولی دنبال کننده ولتاژ، گفته می شود.



شکل ۶-۱۲: مدار بافر

در مدار فوق روابط زیر وجود دارد:

$$V^+ = V^-$$

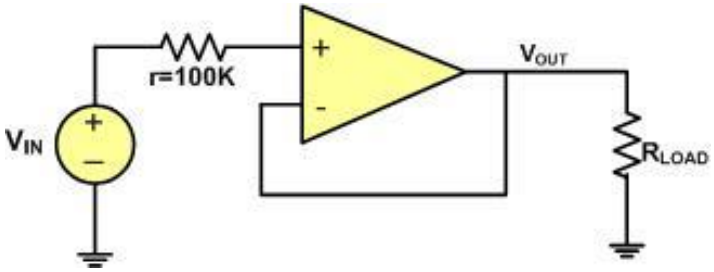
$$V^+ = V_{IN}$$

$$V_{OUT} = V^-$$

با توجه به روابط به این نتیجه می رسیم که:

$$V_{OUT} = V^- = V^+ = V_{IN} \Rightarrow V_{OUT} = V_{IN}$$

بنابراین در مدار فوق، ولتاژ خروجی برابر است با ولتاژ ورودی. حال این سوال مطرح می شود که کاربرد این مدار چیست؟ ما اگر نقطه خروجی را با سیم به ورودی وصل کنیم نیز ولتاژ خروجی برابر ولتاژ ورودی می شود، پس مدار فوق چه کاربردی دارد؟ ما در بخش اول، دیدیم که جریانی به پایه های ورودی اپ امپ وارد و یا خارج نمی شود و بنابراین اگر در مدار فوق، منبع ولتاژ، غیر ایده آل باشد و مثلا یک مقاومت 100K داخلی داشته باشد (شکل زیر)، با توجه با اینکه جریانی از منبع کشیده نمی شود، افت ولتاژ روی مقاومت داخلی نیز صفر است و ولتاژ منبع، به طور کامل به سر ورودی اپ امپ می رسد. از طرف دیگر، اگر مقاومتی را به سر خروجی اپ امپ متصل کنیم که از اپ امپ جریانی کشیده می شود که اپ امپ این جریان را از منابع تغذیه خود (VCC و VCC–) تامین می کند، بدون اینکه کوچکترین جریانی از پایه های ورودی خود (V+ و V-) بکشد. این در حالی است که اگر ما مستقیما، مقاومتی را به منبع ولتاژ غیر ایده آل متصل کنیم، به خاطر جریانی که از منبع ولتاژ غیر ایده آل می کشیم، ولتاژی بر روی مقاومت داخلی افت می کند.



شکل ۶-۱۳: نمونه ای از کاربرد مدار بافر

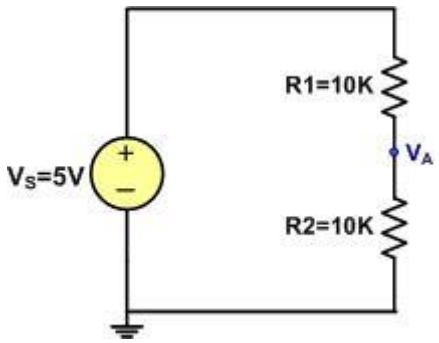
در مواردی که می خواهیم، ولتاژ نقطه ای از مدار را اندازه بگیریم، بدون آنکه کوچکترین تاثیری بر روی مدار بگذاریم، از مدار بافر استفاده می کنیم. به طور مثال، برخی از سنسورها به صورت منابع ولتاژی، با مقاومت داخلی زیاد، رفتار

می کنند و ما اگر خروجی سنسور را مستقیما به مداری متصل کنیم، ولتاژ سنسور افت می کند که در چنین مواردی می توانیم از بافر استفاده کنیم.

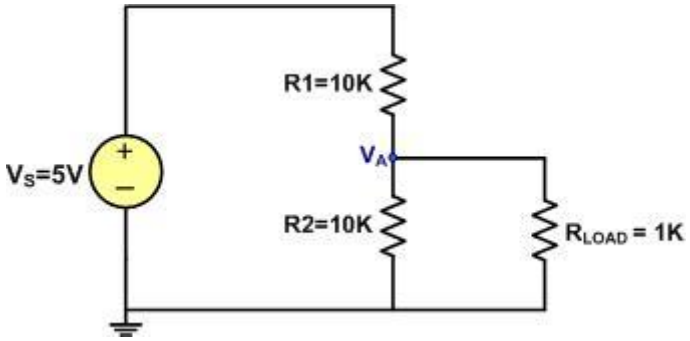
مثال ۶-۴: بافر

در شکلهای الف، ب و ج، ولتاژ گره A و ولتاژی که به مقاومت R_L می رسد را حساب کنید.

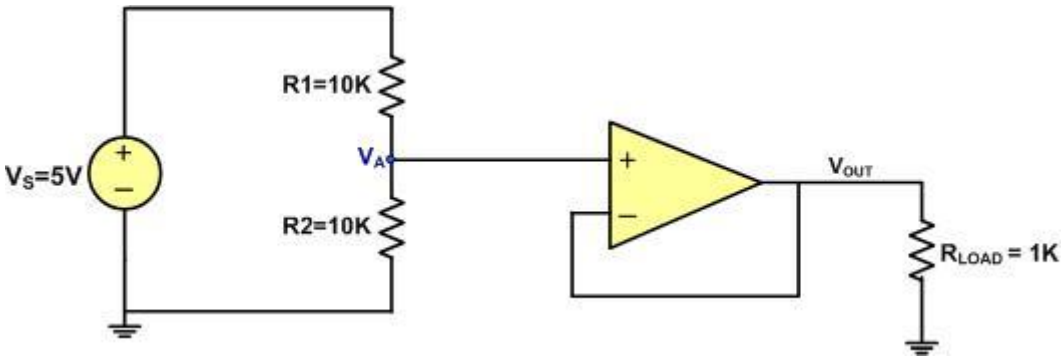
الف)



ب)



ج)



پاسخ:

الف) در شکل الف، مقاومتها با هم سری هستند و تقسیم ولتاژ صورت میگیرد. بنابراین، ولتاژ گره A، برابر است با:

$$V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times V_S = \frac{10K}{20K} \times 5V = 2.5V$$

ب) در شکل ب، مقاومت R_{Load} با مقاومت R_2 موازی شده است. برای بدست آوردن ولتاژ گره A، معادله ولتاژ گره را مینویسیم:

$$\frac{V_S - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} + \frac{0 - V_A}{R_{Load}} = 0 \Rightarrow \frac{5 - V_A}{10K} + \frac{0 - V_A}{10K} + \frac{0 - V_A}{1K} = 0 \Rightarrow 5 = 12V_A \Rightarrow V_A = 0.417V$$

ولتاژ اعمال شده به مقاومت R_{Load} نیز برابر V_A است.

ج) در Op-Amp، جریانی از پایه های ورودی آن وارد و یا خارج نمی شود. پس اگر در شکل ج، معادله ولتاژ گره را در گره A بنویسیم خواهیم داشت:

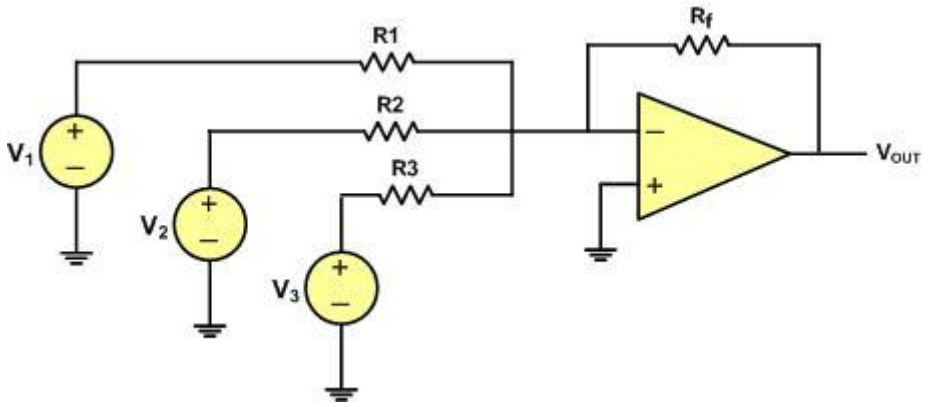
$$\frac{V_S - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{5 - V_A}{10K} + \frac{0 - V_A}{10K} = 0 \Rightarrow 5 = 2V_A \Rightarrow V_A = 2.5V$$

در مدار فوق، طبق قاعده طلایی، ولتاژ سرهای ورودی با هم برابرند و از آنجایی که سر منفی ورودی با سیم به سر خروجی Op-Amp متصل شده، پس ولتاژ سر خروجی اپ امپ با ولتاژ سر مثبت ورودی اپ امپ برابر است و ولتاژ خروجی اپ امپ برابر با 2.5V است.

همان طوری که در شکل ج دیدیم، هنگامی که بافری را به نقطه ای از مدار متصل کنیم تاثیری در مدار ایجاد نمی کند. مثلا در مدار ج، ولتاژ گره A، برابر 2.5V است که در شکل الف که بافر وجود ندارد نیز، ولتاژ گره A، همان 2.5V است. در حالی که اگر مقاومتی را به نقطه ای از مدار متصل کنیم (شکل ب) در رفتار مدار تاثیر می گذارد.

مدار جمع کننده (Summing Amplifier)

به مدار زیر، مدار جمع کننده گفته می شود.



شکل ۶-۱۴: مدار جمع کننده

در مدار فوق با استفاده از قاعده های طلایی می دانیم که $V^+ = V^-$ است. همچنین در شکل فوق می بینیم که $V^+=0V$ است. پس از این دو معادله نتیجه می گیریم که $V^- = V^+ = 0$ است. برای اینکه در مدار فوق، رابطه بین ولتاژهای ورودی و ولتاژ خروجی را به دست آوریم، ولتاژ گره را برای گره V^- می نویسیم:

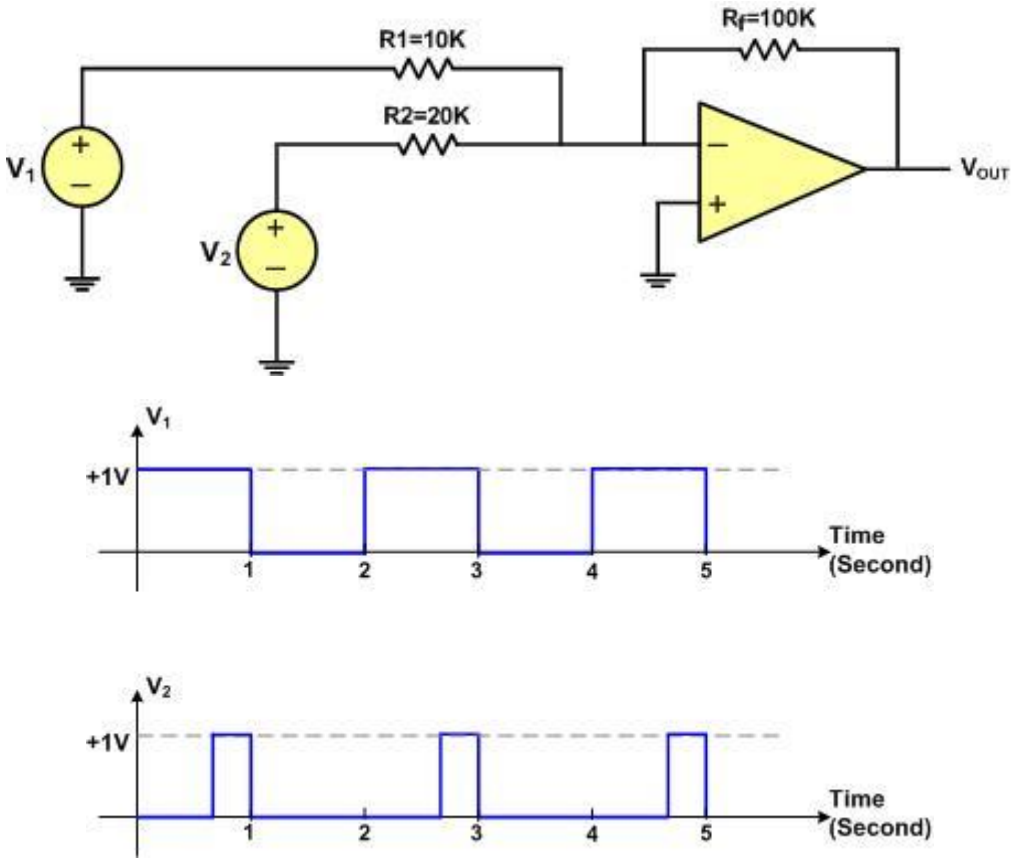
$$\frac{V_1 - 0}{R_1} + \frac{V_2 - 0}{R_2} + \frac{V_3 - 0}{R_3} + \frac{V_{OUT} - 0}{R_f} = 0$$

$$\Rightarrow V_{OUT} = -R_f\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}\right)$$

همان طوری که در رابطه فوق می بینیم، ولتاژ ورودیها به نسبت مقاومتهایی که با آنها سری شده اند، با هم جمع بسته می شوند.

مثال ۶-۵

اگر به مدار زیر، موجهای نشان داده شده در شکل زیر، اعمال شود، شکل موج خروجی چگونه است؟



پاسخ:

در مدار فوق، رابطه بین ولتاژ خروجی و ولتاژهای ورودی به صورت زیر است:

$$V_{OUT} = -R_f\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}\right) \Rightarrow V_{OUT} = -100K\left(\frac{V_1}{10K} + \frac{V_2}{20K}\right) \Rightarrow V_{OUT} = -(10V_1 + 5V_2)$$

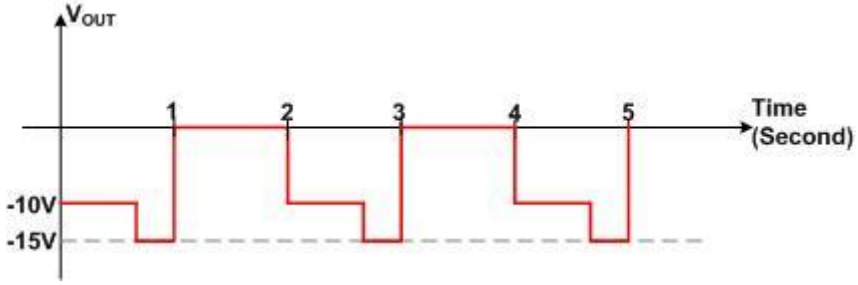
بنابراین هنگامی که ولتاژ V1 = 1V و V2=0V باشد، ولتاژ خروجی برابر است با:

$$V_{OUT} = -(10V_1 + 5V_2) = -(10 + 0) = -10$$

و هنگامی که ولتاژ V1 = 1V و V2=0V باشد، ولتاژ خروجی برابر است با:

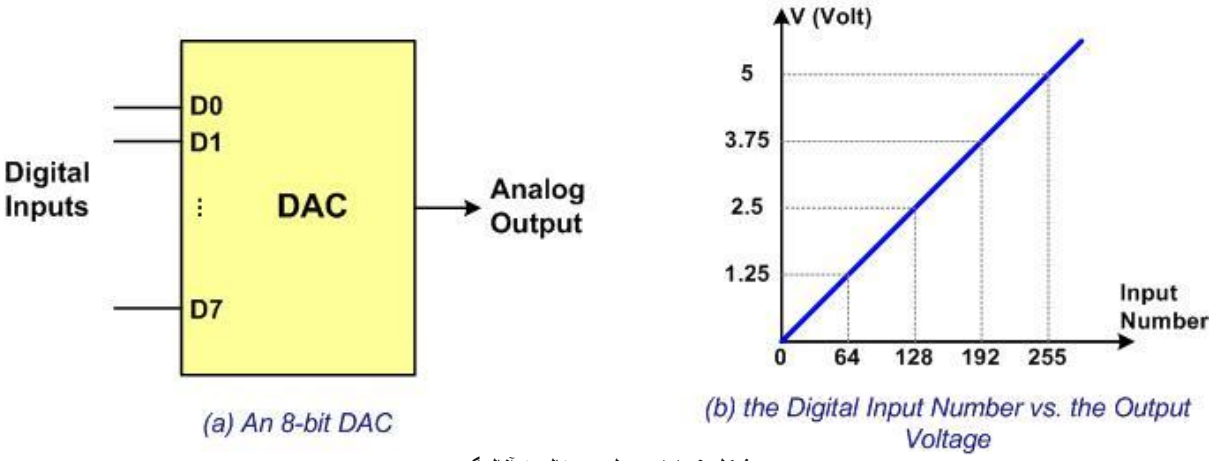
$$V_{OUT} = -(10V_1 + 5V_2) = -(10 + 5) = -15$$

پس شکل موج خروجی به شکل زیر می شود:



مدار مبدل دیجیتال به آنالوگ (اختیاری)

در دنیای دیجیتال ما با مقادیر ۰ و ۱ سر و کار داریم. اما گاهی لازم است که اعداد باینری را به ولتاژی تبدیل کنیم. به طور نمونه، ممکن است مایل باشیم شدت نور لامپی را کنترل کنیم. مثلا که به ازای اعداد ۰ تا ۲۵۵ باینری، نور لامپی از کم نورترین حالت تا پر نورترین حالت تغییر کند. به عنوان نمونه ای دیگر، کنترل ربات متحرکی است که مایلیم سرعت حرکت آن قابل کنترل باشد. در چنین مواردی از عنصری به نام DAC (Digital to Analog Converter) استفاده می کنیم که در ورودی خود، عددی دیجیتال دریافت می کند و در خروجی خود ولتاژی اعمال می کند و رابطه ای خطی بین عدد باینری ورودی و ولتاژ خروجی، وجود دارد. (شکل زیر)



شکل ۶-۱۵: مبدل دیجیتال به آنالوگ

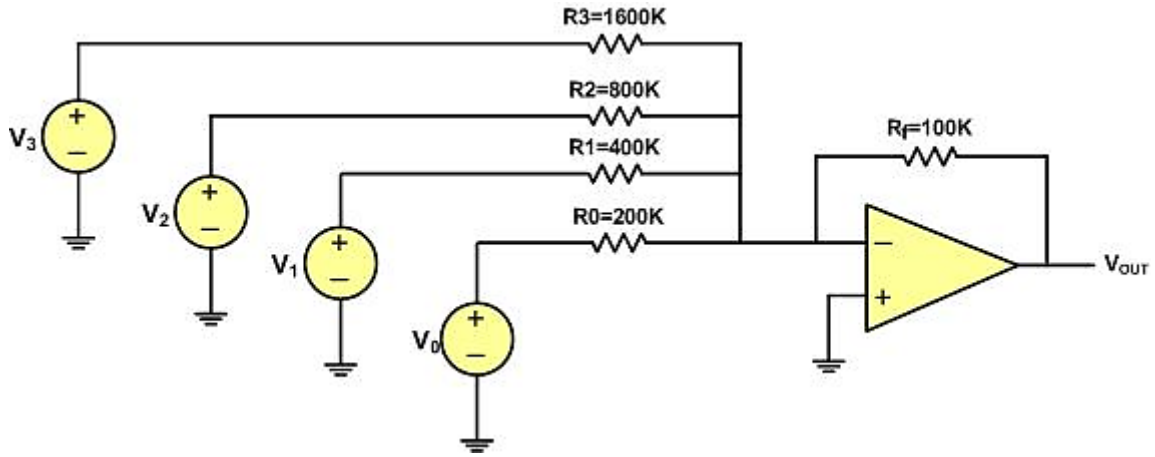
برای ایجاد DAC می توانیم از مدار جمع کننده استفاده کنیم. در مدار زیر، فرض کنید که به جای هر یک از منابع V_0 تا V_3، به ترتیب D0 تا D3، کم ارزش ترین تا پر ارزش ترین بیت مربوط به عدد باینری که می خواهیم به ولتاژ تبدیل کنیم، را اعمال کنیم. (اگر هر یک از ارقام 0 باشد، ولتاژ منبع 0V و اگر هر یک از ارقام 1 باشد، ولتاژ منبع، 5V می باشد.) در این حالت ولتاژ خروجی برابر است با:

$$V_{OUT} = -R_f\left(\frac{V_3}{R_3}+\frac{V_2}{R_2}+\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_0}{R_0}\right) = -\left(\frac{V_3}{2}+\frac{V_2}{4}+\frac{V_1}{8}+\frac{V_0}{16}\right)$$
$$= -\frac{1}{16}(8\times V_3 + 4\times V_2 + 2\times V_1 + V_0)$$

در رابطه فوق می بینید که ضریب ولتاژها، به ترتیب ۱ و ۲ و ۴ و ۸ هستند که همان ضریب جایگاه ارقام در مبنای ۲ است. بنابراین ولتاژ خروجی این مدار *DAC* برابر است با عدد باینری که در ورودی اعمال شده ضربدر $\frac{-1}{16}$ یعنی معادله زیر:

$$\mathrm{V_{Out}} = \frac{-1}{16}\times \text{input number}$$

که در این معادله ضریب $\frac{-1}{16}$ از مقادیر جاری مقاومتها بدست آمده و با تغییر دادن R_F می توانیم این ضریب را تغییر دهیم.

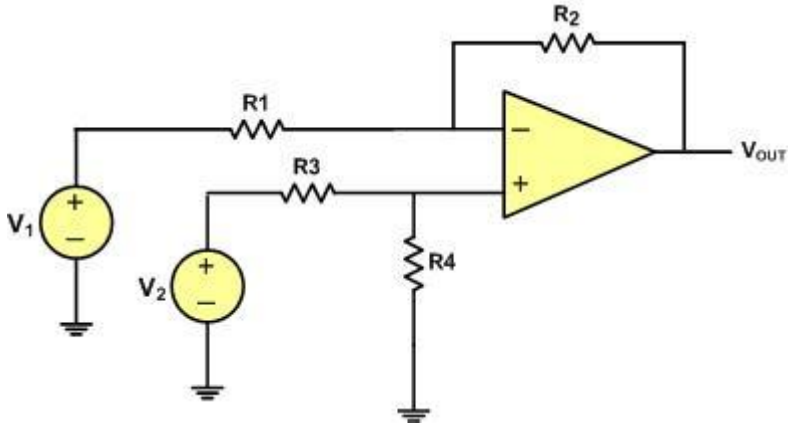


شکل ۶-۱۶: مدار مبدل دیجیتال به آنالوگ

پس مدار فوق در حکم یک مدار DAC چهار بیتی عمل می کند و برای ایجاد کردن DAC ۸ بیتی کافی است که تعداد مقاومتها را به ۸ تا مقاومت افزایش دهیم.

مدار تفریق کننده (Difference Amplifier)

به مدار زیر، تفریق کننده گفته می شود.



شکل ۶-۱۷: مدار تفریق کننده

در مدار فوق، با توجه به اینکه جریانی وارد پایه های ورودی اپ امپ نمی شود. پس ولتاژ گره V^+ به صورت زیر است:

$$\frac{V_2 - V^+}{R_3} + \frac{0 - V^+}{R_4} = 0 \Rightarrow V^+ = \frac{R_4 \times V_2}{R_3 + R_4}$$

در گره V^- داریم:

$$\frac{V_1 - V^-}{R_1} + \frac{V_{OUT} - V^-}{R_2} = 0$$

با توجه به قاعده طلایی، ولتاژ گره های V^+ و V^- با هم برابر است. پس با برابر قرار دادن روابط فوق داریم:

$$\frac{V_1 - \frac{R_4 V_2}{R_3 + R_4}}{R_1} + \frac{V_{OUT} - \frac{R_4 V_2}{R_3 + R_4}}{R_2} = 0$$

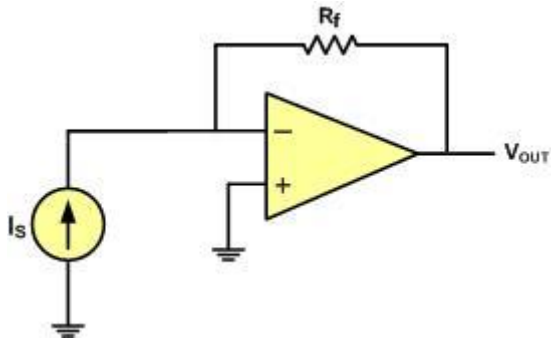
در مدار فوق، اگر مقدار مقاومتهای R1 و R3 با هم برابر باشند و مقدار مقاومتهای R2 و R4 نیز با هم برابر باشند، مقدار ولتاژ خروجی برابر خواهد شد با:

$$V_{\text{OUT}} = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)$$

همان طوری که رابطه فوق نشان می دهد، حاصل تفریق ورودیهای ۱ و ۲، در خروجی مدار تفریق کننده ظاهر می شود. به همین خاطر است که به این مدار، مدار تفریق کننده گفته می شود.

مبدل جریان به ولتاژ

مدار زیر، جریان را به ولتاژ تبدیل می کند.



شکل ۶-۱۸: مبدل جریان به ولتاژ

با استفاده از قاعده طلایی می دانیم که ولتاژ V^+ و V^- با هم برابر است و از آنجایی که ولتاژ V^+ برابر صفر ولت است پس ولتاژ V^- نیز برابر با صفر ولت است. برای اینکه ولتاژ خروجی را محاسبه کنیم، برای گره V^- معادله ولتاژ گره را می نویسیم.

$$I_S + \frac{V_{OUT} - 0}{R_f} = 0 \Rightarrow V_{OUT} = I_S R_f$$

سوالی برای تفکر علاقه مندان

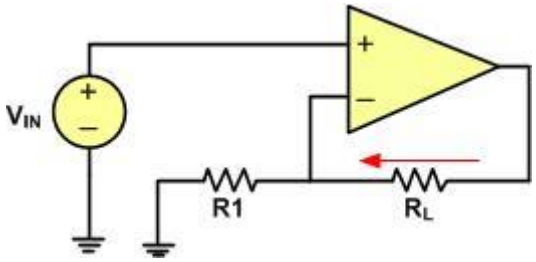
ممکن است این سوال در ذهن شما ایجاد شود که اگر جریان را مستقیما از مقاومت عبور دهیم نیز همین ولتاژ در دو سر آن ایجاد می شود. پس وجود OP-AMP چه فایده ای دارد؟

برای اینکه تفاوت این دو مدار را پیدا کنید، برای هر دو مدار، معادل تونن را به دست آورید. خواهید دید که اگر چه اندازه ولتاژ در مدارهای معادل با هم برابر است، اما مقاومت داخلی مداری که بدون OP-AMP ایجاد شود، برابر با R_F است در حالی که در مداری که OP-AMP وجود دارد برابر با صفر است و بنابراین اگر به خروجی اپ امپ، مقاومتی متصل کنیم و از آن جریان بکشیم ولتاژ آن افت نمی کند. (در اپ امپ واقعی، به خاطر اینکه خروجی اپ امپ، مقاومتی دارد، مقاومت معادل مدار صفر نیست اما همچنان بسیار کمتر از مقدار R_F خواهد بود.)

نمونه کاربرد مدار فوق، در مواردی است که یک سیگنال ضعیف جریان (مثلا خروجی یک سنسور) داریم و می خواهیم از آن، سیگنال قوی تری و به شکل ولتاژ داشته باشیم تا بتوانیم توسط مبدل آنالوگ به دیجیتال (ADC) به عدد باینری تبدیل کنیم. در مورد ADC و signal conditioning در انتهای فصل یک توضیح داده ایم که می توانید به آن رجوع کنید.

منبع جریان

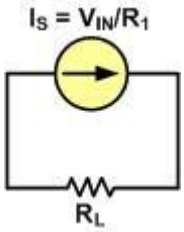
در مدار زیر جریان گذرا از R_L را حساب کنید.



در مدار فوق، $V+$ برابر با V_{IN} است و طبق قاعده طلایی V^- برابر با V^+ است. پس ولتاژ V^- برابر با V_{IN} است. بنابراین جریان گذرا از R_1 برابر است با:

$$i_{R1} = \frac{V^- - 0}{R_1} = \frac{V_{IN}}{R_1}$$

با توجه به اینکه جریان وارد شونده به دو سر ورودی اپ امپ، صفر آمپر است، پس جریان گذرا از R_L با جریان گذرا از R_1 با هم برابر است. پس جریان گذرا از R_L برابر است با:

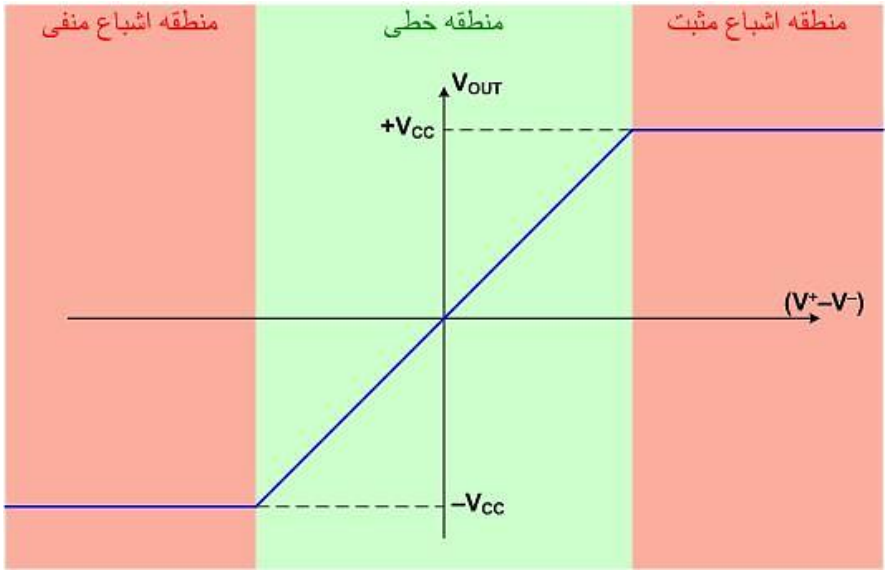


$$i_{RL} = i_{R1} \Rightarrow i_{RL} = \frac{V_{IN}}{R_1}$$

بنابراین در مدار فوق، جریان گذرا از R_L به مقدار مقاومت R_L بستگی ندارد و مدار فوق، همیشه جریانی به اندازه V_{IN}/R_1 را از مقاومت R_L عبور می‌دهد. به عبارت دیگر، مدار فوق برای R_L در نقش یک منبع جریان، عمل می‌کند.

بخش ۶-۳: استفاده از اپ امپ به صورت غیر خطی

همانطوری که در ابتدای فصل دیدیم، رابطه بین ورودی و خروجی اپ امپ به شکل زیر است که در بخش دوم، با افزودن فیدبک منفی بین سر خروجی و سر منفی اپ امپ، آن را در منقطه خطی نگه داشتیم و رفتار اپ امپ را در منطقه خطی بررسی کردیم. حال در این بخش، به بررسی رفتار اپ امپ در مناطق اشباع می پردازیم.



شکل ۶-۱۹: مناطق کاری اپ امپ

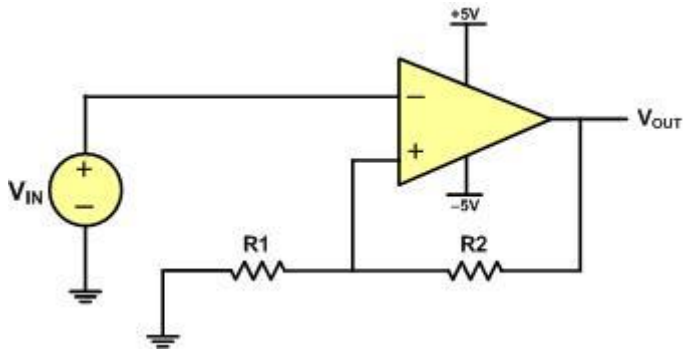
همان طوری که در بخش اول دیدیم، اپ امپ تفاضل دو سر ورودی را A برابر می کند و در خروجی اعمال می کند. بنابراین برای اینکه اپ امپ وارد منطقه اشباع مثبت شود، کافی است که تفاضل بین دو سر ورودی از $\frac{+VCC}{A}$ بیشتر شود. همچنین اگر تفاضل بین دو سر ورودی کمتر از $\frac{-VCC}{A}$ شود، اپ امپ وارد منطقه اشباع منفی می شود. با توجه به اینکه مقدار A خیلی بزرگ است (در LM741 به اندازه ۳۰۰۰۰۰ است و در برخی دیگر از انواع اپ امپ بالای میلیون است) پس با سیگنال بسیار کوچکی، در حد چندین میکرو ولت، اپ امپ وارد منطقه اشباع می شود.

بنابراین از خود اپ امپ، می توانیم به عنوان عنصری استفاده کنیم که مقادیر ورودی را با هم مقایسه می کند که هرگاه $V^- < V^+$ بود در خروجی VCC+ می دهد و اگر $V^- > V^+$ بود در خروجی VCC– را اعلام می کند.

اما آیا هنگامی که ولتاژ دو سر ورودی با هم برابر باشد، مقدار خروجی اپ امپ چه خواهد بود؟

هنگامی که ولتاژ دو پایه ورودی اپ امپ با هم برابر شود، اپ امپ در منطقه خطی قرار می گیرد و با توجه به اینکه با چندین میکرو ولت کم و زیاد شدن ورودیها، اپ امپ وارد منطقه اشباع مثبت و اشباع منفی می شود، هنگامی که ولتاژ دو سر ورودی تقریبا با هم برابر باشد، عملا نویز محیط سبب می شود که اپ امپ بین اشباع منفی و اشباع مثبت نوسان کند و خروجی اپ امپ نیز بین دو ولتاژ VCC– و VCC+ نوسان کند و خروجی پایداری نداشته باشیم.

لذا برای اینکه خروجی مدار مقایسه کننده، حالت پایداری پیدا کند، مداری به شکل زیر می بندیم که اصطلاحاً آن را اشمیت تریگر (Schmitt trigger) می نامیم.



شکل ۶-۲۰: مدار اشمیت تریگر

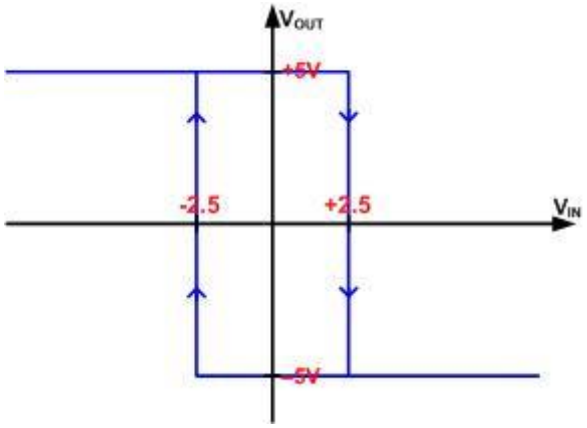
در مدار فوق، با توجه به اینکه جریانی وارد سرهای ورودی اپ امپ نمی شود، ولتاژ V+ برابر است با:

$$V^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times V_{OUT}$$

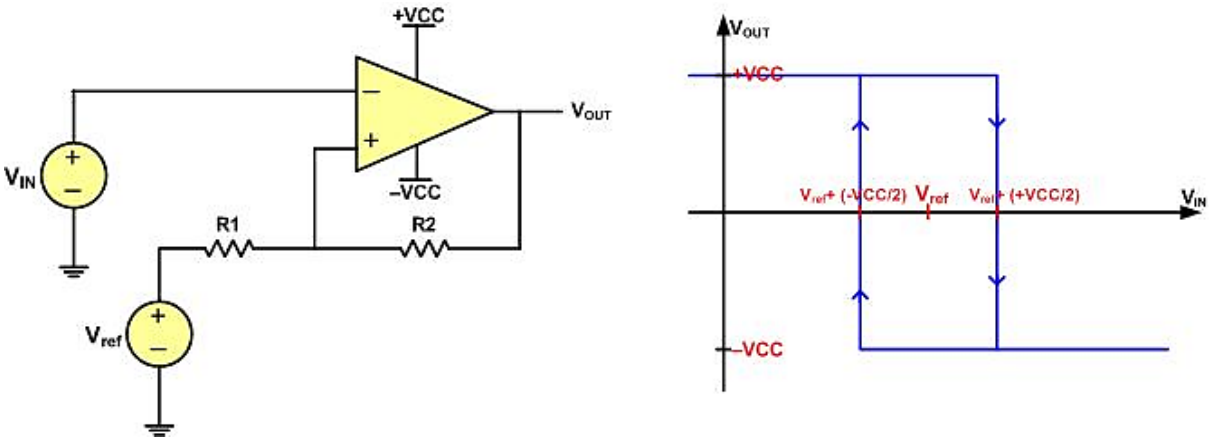
به عبارت دیگر، در مدار فوق ولتاژ گره V+ به ولتاژ خروجی جاری اپ امپ وابسته است و اپ امپ، ولتاژ V_{IN} را با ولتاژ گره V+ مقایسه می کند و بنابراین خروجی جاری اپ امپ در مشخص کردن خروجی آتی اپ امپ نقش خواهد داشت.

هنگامی که اپ امپ در وضعیت اشباع مثبت قرار داشته باشد، خروجی اپ امپ برابر با 5V+ است و بنابراین ولتاژ V+ برابر 2.5V+ است. در این حالت، تا مادامی که مقدار V_{IN} کمتر از 2.5V+ باشد، خروجی اپ امپ، 5V+ است و هنگامی که ولتاژ ورودی از 2.5V+ بیشتر شود، ولتاژ V- از V+ بیشتر می شود و خروجی اپ امپ به 5V- (یعنی به ولتاژ تغذیه منفی)

تغییر می کند و اپ امپ به داخل اشباع منفی می رود و ولتاژ گره +V نیز به 2.5V- تغییر می کند. لذا پس از این، برای اینکه خروجی اپ امپ مجددا به 5V+ تغییر کند لازم است که V_{IN} از 2.5V- کمتر شود. شکل زیر بیان کننده رابطه ولتاژ ورودی و ولتاژ خروجی است و همانطوری که نشان داده شده است، هنگامی که ولتاژ ورودی به زیر 2.5- ولت افت کند، خروجی به 5V+ تغییر می کند و هنگامی که ولتاژ ورودی بیشتر از 2.5+ ولت شود، خروجی به 5V- تغییر می کند و تا مادامی که ولتاژ ورودی در دامنه 2.5V- تا 2.5V+ باشد، خروجی مدار در وضعیت قبلی خود باقی می ماند.



در مدار فوق، مقاومتهای R1 و R2 را با هم برابر گرفتیم و بنابراین در VCC/2– و VCC/2+ وضعیت اپ امپ تغییر می کند. در صورت تمایل با کم و زیاد کردن مقدار R1 و R2 نسبت به هم، می توانیم فاصله نقاط تغییر وضعیت را نسبت به مبدا مختصات، کم و زیاد کنیم. مثلا اگر در مدار فوق مقدار مقاومتهای R1 و R2 به ترتیب برابر با 10K و 40K بود، ولتاژهای تغییر وضعیت برابر با VCC/5– و VCC/5+ می شد. یعنی در ولتاژهای 1V- و 1V+ تغییر وضعیت می داد. همچنین اگر مطابق شکل زیر، منبعی به سر مقاومت R1 بیافزاییم، نقاط تغییر وضعیت را می توانیم که به سمت راست یا چپ جابجا کنیم.



همان طوری که در فصل خازن خواهیم دید، با افزودن خازنی به مدار اشمیت تریگر می توانیم یک مولد موج مربعی ایجاد کنیم.

در مدار اشمیت تریگر، بجای اینکه عنصری بین سر خروجی اپ امپ و ورودی منفی قرار داشته باشد، مقاومتی بین سر خروجی و ورودی مثبت قرار گرفته است و اصطلاحاً مدار اشمیت تریگر دارای فیدبک مثبت می باشد.

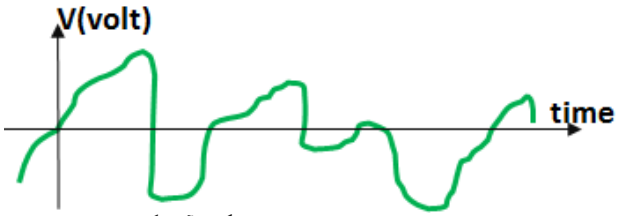
فصل هفتم: دنیای دیجیتال و ترانزیستورها

در فصلهای گذشته با کلیات تحلیل مدارهای الکتریکی آشنا شدید. در این فصل با ترانزیستور موسفت آشنا می شویم و ساختار داخلی گیتهای لاجیک را بررسی می کنیم و از روی ساختار داخلی گیت ها، دید دقیقتری از گیتهای منطقی و مدارهای دیجیتال پیدا می کنیم.

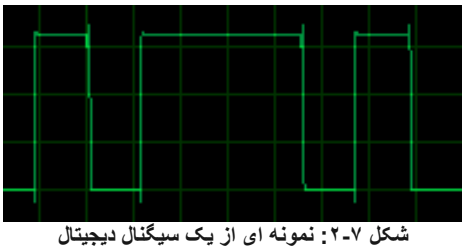
بخش ۷-۱: آشنایی با دنیای دیجیتال

مدارهای دیجیتال و آنالوگ

مدارهای الکتریکی ممکن است که آنالوگ یا دیجیتال باشند. در مدارهای آنالوگ، مقادیر کمیتها به صورت پیوسته (Continuous) تغییر می کند و کوچکترین تغییری در سیگنال (به ولتاژ، جریان، خاصیت خازنی و غیره اصطلاحا سیگنال گفته می شود) به معنای کم و زیاد شدن مقدار آن می شود. به طور مثال، ولتاژ یا جریانی که از میکروفن به وجود می آید یک سیگنال آنالوگ است. زیرا مقدار آنها به صورت پیوسته تغییر می کند و کوچکترین کم و زیاد شدن ولتاژ به معنای نوسان داشتن میکروفن و ثبت شدن صدایی می باشد. در شکل ۷-۱ نمونه ای از یک سیگنال آنالوگ را می بینید.



شکل ۷-۱: نمونه ای از یک سیگنال آنالوگ


شکل ۷-۲: نمونه ای از یک سیگنال دیجیتال

مدارهای دیجیتال، با سیگنالهای گسسته سر و کار دارند. بدین معنا که مقادیر کمیتها بر حسب اینکه در چه بازه ای باشند دارای معنای مشخصی هستند و تا مادامی که از بازه مشخصی خارج نشویم، کم و زیاد شدن کمیت باعث تغییر معنای کمیت نمیشود. به طور مثال اگر بگوییم که ولتاژ کمتر از 2.5 ولت به معنای صفر منطقی و ولتاژ بیشتر از 2.5 ولت به معنای یک منطقی است، در این صورت تا مادامی که مقدار ولتاژ، بین 0 تا 2.5 ولت نوسان کند، همچنان به معنای صفر منطقی در نظر گرفته میشود. در شکل ۷-۲ یک سیگنال دیجیتال را می بینید.

همان طوری که در درس مدارهای منطقی آموخته اید، با استفاده از یک و صفر، می توانیم اعداد باینری را به وجود آوریم و از آن برای بیان کردن اطلاعات خود اعم از اعداد، متن، عکس و تصویر، صدا و غیره استفاده کنیم.

موانع انتقال سیگنال

هنگامی که بخواهیم سیگنالی را از نقطه ای به نقطه دیگری ارسال کنیم موانع مختلفی ایجاد مزاحمت می کنند که از جمله آنها خاصیت تضعیف (Attenuation)، نویز (Noise) و خاصیت cross talk هستند.

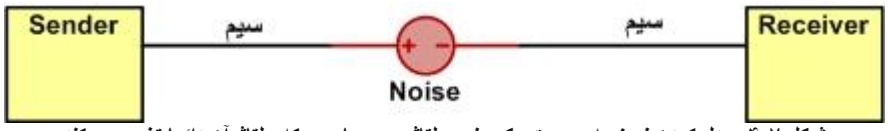
خاصیت تضعیف (Attenuation)

هنگامی که ولتاژی را به سر سیمی اعمال کنیم، به خاطر مقاومتی که سیم دارد، به مرور که در سیم به جلو برویم ولتاژ افت می کند که به این افت کردن ولتاژ تحت تاثیر مقاومت، اصطلاحا خاصیت تضعیف (Attenuation) گفته می شود. مقاومت موجود در سیم واقعی را می توانیم به صورت مقاومت کوچکی که با سیم ایده آل سری شده باشد، مدل کنیم. شکل زیر را ببینید

شکل ۷-۳: مدل کردن سیم واقعی به صورت سیم ایده آل و مقاومت

تاثیر نویز (Noise)

ممکن است تاکنون دیده باشید که اگر دو سر ولتمتر را آزاد در هوا قرار دهیم، با وجود اینکه سرهای ولتمتر به جایی متصل نیستند، اما ولت متر مقداری ولتاژ نشان می دهد که اندازه این ولتاژ دائما کم و زیاد می شود. عملا در اثر امواج رادیویی و کار کردن وسایل مختلف (مثلا موتورهای الکتریکی) و نیز وقایع طبیعی (مثل ساعقه و طوفانهای خورشیدی) ولتاژی در محیط ایجاد می شود که مقدار این ولتاژ، کاملا تصادفی است و دائما تغییر می کند. به این ولتاژ تصادفی ضعیف که از محیط، بر روی سیم ها و وسایل الکتریکی اثر می گذارد اصطلاحا نویز می گویند. ولتاژ نویز معمولا کوچک است و می توانیم آن را به صورت منبع ولتاژی با مقدار تصادفی (random) که با سیم سری شده است در نظر بگیریم. شکل زیر را ببینید.



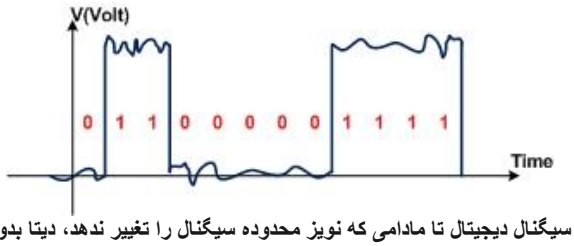
شکل ۷-۴: مدل کردن نویز به صورت یک منبع ولتاژ سری با سیم که ولتاژ آن دائما تغییر می کند

خاصیت cross talk

همان طور که در فصل خازن و سلف خواهیم دید، هنگامی که دو رشته سیم از نزدیک هم عبور کنند، به خاطر خاصیت سلفی و خازنی که بین آنها به وجود می آید تاثیر مختصری را بر هم می گذارند که اصطلاحا به آن cross talk می گویند.

تاثیر نویز بر سیگنالهای دیجیتال و آنالوگ

همان طوری که در فوق اشاره شد، کلیه موانع انتقال، اعم از Attenuation، Noise و cross talk می توانند ولتاژ سیم را کمی تغییر دهند. بنابراین اگر ولتاژی را به سر سیمی اعمال کنیم در انتهای سیم، ممکن است که مقدار ولتاژ دریافت شده کمی تغییر کند. در سیستم های آنالوگ از آنجایی که کوچکترین تغییری در سیگنال، به معنای تغییر کردن سیگنال تلقی می شود، پس موانع انتقال می توانند سیگنالهای آنالوگ را کمی تغییر دهند. اما سیستمهای دیجیتال محدوده ای از ولتاژ را به معنای صفر و محدوده دیگری را به معنای یک تلقی می کنند. بنابراین تا مادامی که تغییرات ناشی از موانع انتقال کوچک باشد و سیگنال، از محدوده ولتاژ خود خارج نشود، در مقصد همان دیتای اولیه را دریافت می کنیم. شکل زیر را ببینید.

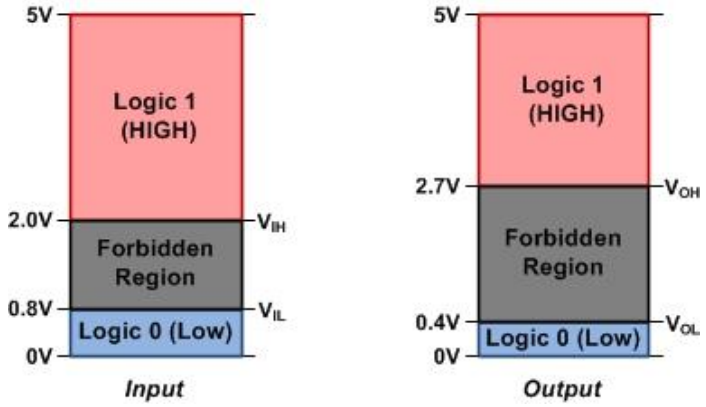


شکل ۷-۵: در سیگنال دیجیتال تا مادامی که نویز محدوده سیگنال را تغییر ندهد، دیتا بدون تغییر می ماند

سطوح ولتاژ و نویز مارگین (Noise Margin)

همان طوری که در فوق ذکر شد، در مدارهای دیجیتال لازم است که مقادیر صفر منطقی و یک منطقی را به صورت ولتاژ بیان کنیم. اکنون قراردادهای مختلفی جهت بیان کردن صفر و یک منطقی وجود دارد که از جمله رایج ترین آنها، استاندارد TTL و استاندارد CMOS و RS232 است.

در شکل زیر، سطوح ولتاژ را بر حسب استاندارد TTL ملاحظه می کنید. همان طور که در شکل می بینید هر وسیله الکتریکی که بر حسب TTL کار می کند، زمانی که هرگاه بخواهد یک منطقی را بیرون دهد، باید ولتاژی که بر روی سیم می گذارد در دامنه 2.7 تا 5 ولت باشد و هنگامی که می خواهد صفر منطقی را بیرون بفرستد، بایست ولتاژ خروجی بین 0 تا 0.4 ولت باشد. همچنین زمانی که وسایلی که بر حسب TTL کار می کنند، سیگنالی را از پایه ورودی خود دریافت می کنند، می بایست ولتاژ بین 0 تا 0.8 ولت را به عنوان صفر منطقی و ولتاژ 2 تا 5 ولت را به عنوان یک منطقی در نظر بگیرند.



شکل ۷-۶: سطوح ولتاژ در TTL

در شکل فوق، عبارات V_{OH} و V_{OL} و V_{IH} و V_{IL} را ملاحظه می کنید که در زیر به توضیح آنها می پردازیم:

V_{OH} و V_{OL}: هنگامی که وسیله الکتریکی می خواهد در خروجی خود، یک منطقی را بیان کند، ولتاژی که روی پایه خروجی خود اعمال می کند حتما باید از V_{OH} بیشتر باشد. به عبارت دیگر V_{OH} مخفف (Output High) است و بیان می کند که وسیله الکتریکی هنگامی که می‌خواهد یک منطقی (High) را بیان کند باید همیشه بیش از ولتاژ V_{OH} را بر روی پایه خروجی (output) ایجاد کند. همچنین V_{OL} حداکثر ولتاژی است که می تواند وسیله الکتریکی برای بیان کردن صفر منطقی از آن استفاده کند. به عبارت دیگر، زمانی که می خواهد صفر منطقی (Low) را بیرون دهد هیچگاه نباید ولتاژ پایه خروجی از V_{OL} بیشتر شود. همان طوری که می بینید بین V_{OL} و V_{OH} محدوده ای وجود دارد که وسیله الکتریکی هیچ گاه نباید آن را ایجاد کند که به این محدوده، منطقه ممنوعه (Forbidden region) گفته می شود.

V_{IH} و V_{IL}: وسیله الکتریکی هنگامی که در ورودی خود، سیگنالی را دریافت می کند، می بایست ولتاژهای کمتر از V_{IL} را به معنای صفر منطقی تعبیر کند و ولتاژی بیشتر از V_{IH} را به معنای یک منطقی تعبیر کند. وسیله الکتریکی در مورد ولتاژهای بین V_{IH} و V_{IL} تعهدی ندارد و در صورت تمایل می تواند آن را به عنوان صفر منطقی و یا یک منطقی تلقی کند.

ممکن است بپرسید که چرا مقادیر محدوده های ولتاژ به ازای ورودیها و خروجی ها متفاوت است. همان طوری که در فوق گفتیم، موانع انتقال (از قبیل نویز و تضعیف) می توانند ولتاژ سیم حامل سیگنال را تغییر دهند. بنابراین وسیله فرستنده می‌بایست تا حد امکان، سیگنال خروجی خود را نزدیک به ۰ ولت و ۵ ولت بفرستد تا تاثیراتی که موانع انتقال در طی مسیر بر روی سیگنال می گذارند محدوده ولتاژ سیگنال را تغییر ندهند. از طرف دیگر، گیرنده نیز، محدوده وسیع تری را به عنوان صفر و یک منطقی در نظر می گیرد تا اگر تحت تاثیر موانع انتقال، ولتاژ سیگنال تغییر کرد، محدوده ولتاژ تغییر نکند. درست مثل همین موضوع را در روابط انسانها وجود دارد. برای اینکه اثر سوء تفاهمات (نویز) به حداقل برسد کسی که می خواهد مطلبی را بیان کند، خوبست که به واضح ترین شکل ممکن بیان کند و کسی که شنونده است خوبست که با چشم پوشی بشنود.

همچنین در روابط انسانی خوبست که به نیکی با مردم رفتار کنیم (خروجی خوبی داشته باشیم!) اما رفتار مردم را با چشم پوشی نظاره کنیم (ورودی خطاپوش داشته باشیم!)

نویز مارگین (Noise Margin) و میزان مقاوم بودن در برابر نویز

عملا اگر وسیله الکتریکی به بدترین شکل ممکن عمل کند مجاز است که مقادیر V_{OH} و V_{OL} را در خروجی خود اعمال کند و وسیله دریافت کننده ولتاژهای بیش از V_{IH} را به عنوان یک و ولتاژهای کمتر از V_{IL} را به عنوان صفر در نظر می گیرد. پس اگر در طی مسیر، نویز (و یا سایر موانع) باعث شود که ولتاژ V_{OH} تا V_{IH} افت کند و یا V_{OL} تا V_{IL} افزایش یابد، همچنان سیگنال بدون خطا به مقصد می رسد. به اختلاف بین V_{OH} و V_{IH}، High Noise margin گفته می شود که با NM1 نمایش داده می شود. (در برخی کتب نیز با نماد V_{NH} نمایش می دهند.) اختلاف پتانسیل بین V_{OL} و V_{IL} را Low Noise Margin می‌گویند که با NM0 (یا V_{NL}) نمایش داده می شود. در عمل، سیستم به اندازه مینیمم مقادیر NM1 و NM0 در برابر نویز مقاوم است که آن را Noise Margin برای آن سیستم می گوییم.

$$NM1 = |V_{OH} - V_{IH}|$$
$$NM0 = |V_{IL} - V_{OL}|$$
$$NM = \min(NM0, NM1)$$

شکل ۷-۷: روابط مربوط به Noise Margin

مثال ۷-۱: نویز مارگین را برای TTL حساب کنید.

حل:

$NM1 = |V_{OH} - V_{IH}| = 2.4 - 2 = 0.4V$

$NM0 = |V_{IL} - V_{OL}| = 0.8 - 0.4 = 0.4V$

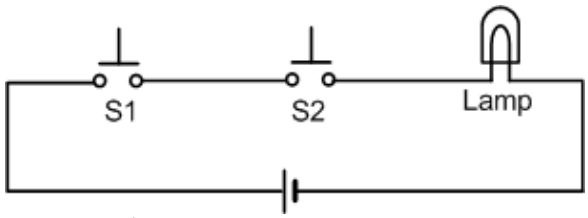
$NM = \min(NM1, NM0) = 0.4V$

پس نویز مارگین برای TTL برابر با 0.4V است. به عبارت دیگر، تا مادامی که دامنه نویز محیط و سایر موانع انتقال کمتر از 0.4V باشد، مطمئن هستیم که سیگنال به سلامت به مقصد می رسد.

بخش ۷-۲: مدارهای منطقی و ترانزیستور

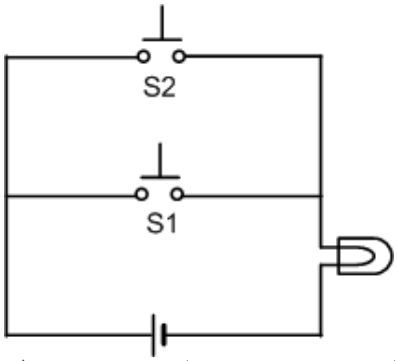
پیاده سازی مدارهای دیجیتال

فرض کنید که دو تا کلید را به صورت زیر با هم سری کرده باشیم. برای اینکه چراغ روشن شود می‌بایست هر دو کلید S1 و S2 بسته باشند. به عبارت دیگر روشن شدن چراغ منوط به بسته بودن S1 و S2 است. پس این دو کلید رابطه AND را ایجاد می‌کنند.



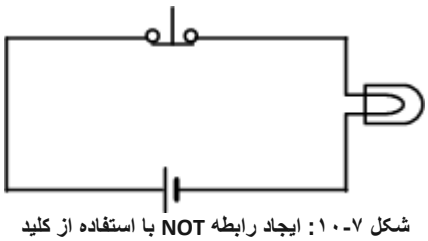
شکل ۷-۸: سری کردن دو کلید با هم و ایجاد رابطه AND

حال اگر دو کلید را با هم موازی کنیم بستن هر یک از کلیدها باعث روشن شدن چراغ می‌شود. یعنی اگر S1 یا S2 بسته باشند چراغ روشن می‌شود.



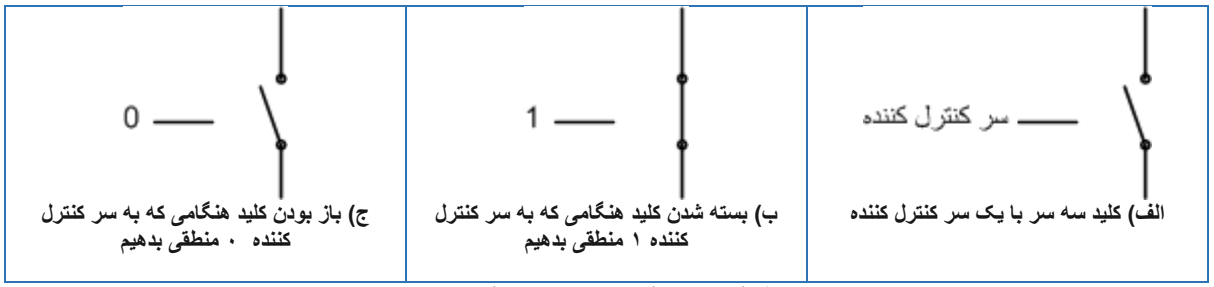
شکل ۷-۹: موازی کردن دو کلید با هم و ایجاد رابطه OR

حال مدار زیر را ببینید. در مدار زیر کلید معمولا بسته (Normally Close) است. کلید معمولا بسته کلیدی است که تا مادامی که به آن فشاری وارد نکرده باشیم مدار را بسته باشد و زمانی که به آن فشاری وارد کنیم مدار باز شود. در مدار زیر تا مادامی که فشاری به کلید وارد نکرده باشیم چراغ روشن است و زمانی که کلید را می‌فشاریم کلید باز می‌شود. پس روشن بودن چراغ با فشردن کلید رابطه عکس دارد و از لحاظ منطقی رابطه NOT حاکم است.



شکل ۷-۱۰: ایجاد رابطه NOT با استفاده از کلید

بنابراین می‌بینید که با استفاده از کلیدها می‌توانیم روابط منطقی مختلف را پیاده سازی کنیم. البته در مدارهای منطقی ما مایلیم که به جای اینکه دستی کلیدها را فشرده کنیم، با اعمال کردن ولتاژی باعث تحریک شدن ورودیها و ایجاد شدن ولتاژ منطقی در خروجی گردیم. مثلا در یک گیت AND که از استاندارد TTL پیروی می‌کند، هنگامی که به پایه های ورودی گیت ولتاژ ۵ ولت می‌دهیم در خروجی ولتاژ ۵ ولت را می‌گیریم. بنابراین برای ساخت مدارهای دیجیتال ما به یک عنصر سه سر مشابه کلید احتیاج داریم که هرگاه به سر سوم آن ولتاژ دهیم کلید بسته شود و هرگاه به سر سوم ولتاژ ندهیم کلید باز باشد. شکل ۷-۱۱ را ببینید.



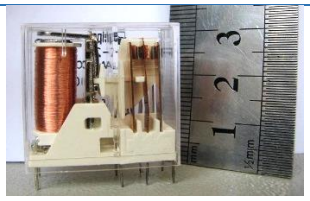
الف) کلید سه سر با یک سر کنترل کننده

ب) بسته شدن کلید هنگامی که به سر کنترل کننده ۱ منطقی بدهیم

ج) باز بودن کلید هنگامی که به سر کنترل کننده ۰ منطقی بدهیم

شکل ۷-۱۱: کلیدی با یک سر کنترل کننده

در طول تاریخ برای ایجاد کلید سه سر از وسایل مختلفی استفاده کرده‌اند که برخی از آنها عبارتند از: رله، کنتاکتور، لامپهای خلاء و ترانزیستورها.



الف. رله

ب. لامپهای خلاء (کپی شده از سایت wikipedia.org)

شکل ۷-۱۲: عکس رله و لامپهای خلاء

در کامپیوترهای اولیه از لامپ خلاء برای تولید مدارهای منطقی استفاده می‌شد و در نتیجه هم مصرف برق بالایی داشتند، هم بسیار بزرگ بودند، هم بسیار گران بودند و هم بسیار کند بودند. در زیر عکس یک کامپیوتر را می‌بینید. این کامپیوتر در دهه ۱۹۵۰ با استفاده از ۲۰۰ هزار لامپ خلاء در زمینی به ابعاد ۱۰۱۷۰ متر مربع ساخته شده که در زمان کار کردن ۳ مگا وات برق مصرف می‌کرده و ۲۵۰ تن وزن داشته و می‌توانسته ۸۰ هزار عمل جمع را در ثانیه انجام دهد.

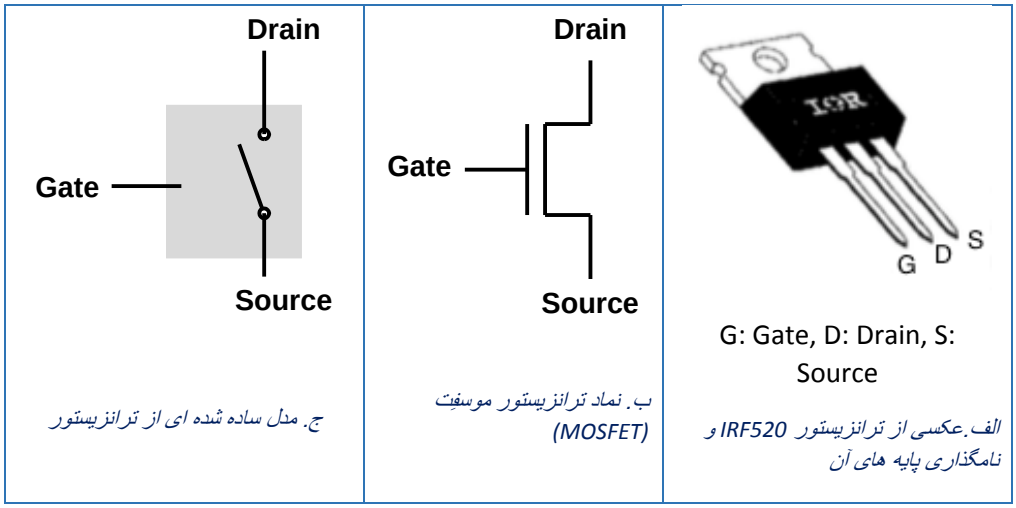
اما بعدها با استفاده از نیمه هادیها ترانزیستورها و آی سی ها ساخته شدند و به کمک آنها کامپیوترهایی در ابعاد کوچک و با قیمتهای مناسب و سرعت بالا ساخته شدند.

شکل ۷-۱۳: کامپیوتر SAGE

ما تمرکز خود را بر روی ترانزیستورها می‌گذاریم و خواهیم دید که چگونه با استفاده از ترانزیستورها مدارهای منطقی ساخته می‌شوند تا بدین وسیله درک بهتری از رفتار مدارهای دیجیتال به دست آوریم.

آشنایی با ترانزیستور MOSFET نوع N

ترانزیستورها عنصری سه سر هستند. در شکل زیر عکس و نماد ترانزیستور MOSFET نوع N را می بینید. این ترانزیستور سه پایه به نامهای درین (drain)، سُورس (source) و گِیت (gate) دارد. هرگاه پایه گیت را به ۵ ولت وصل کنیم، پایه درین را به سورس وصل می کند و هرگاه ولتاژ پایه گیت ۰ ولت باشد، پایه درین را از سورس جدا می کند. بنابراین ترانزیستور را می توانیم به صورت شکل ۷-۱٤-ج مدل کنیم.



ج. مدل ساده شده ای از ترانزیستور

ب. نماد ترانزیستور موسفت (MOSFET)

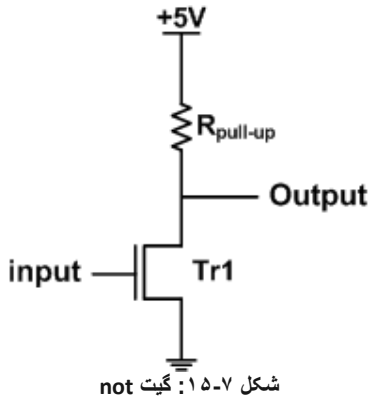
الف. عکسی از ترانزیستور IRF520 و نامگذاری پایه های آن

شکل ۷-۱۴: ترانزیستور موسفت نوع N

به عبارت دیگر، هر گاه ولتاژ پایه گیت، ۵ ولت بیشتر از ولتاژ پایه سورس باشد، کلید داخل ترانزیستور بسته می شود و هر گاه ولتاژ پایه گیت با ولتاژ پایه سورس برابر باشند کلید داخل ترانزیستور باز است.

ساخت مدارهای دیجیتال با استفاده از ترانزیستور

ساده ترین مداری که می‌توانیم با استفاده از ترانزیستور درست کنیم گیت NOT است. در مدار زیر تا مادامی که ولتاژ ۰ ولت را به پایه گیت ترانزیستور اعمال کنیم ترانزیستور خاموش است و در حکم مدار باز عمل می‌کند. بنابراین سر خروجی مدار از طریق مقاومت pull-up به ۵ ولت متصل می‌شود. زمانی که به پایه ورودی ولتاژ ۵ ولت را بدهیم ترانزیستور روشن می‌شود و سر درین خود را به سر سورس (که متصل به زمین است) وصل می‌کند. بنابراین سر output متصل به زمین می‌شود و ولتاژ آن صفر می‌شود.

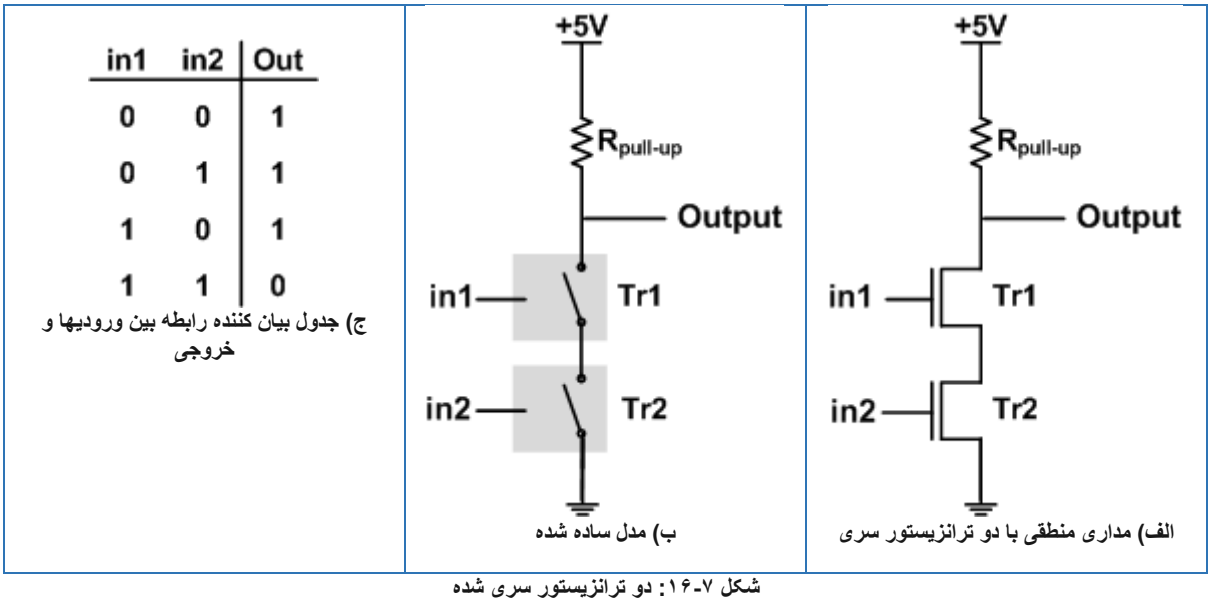


شکل ۷-۱۵: گیت not

مقاومت بالاکش (pull-up) در دنیای دیجیتال کاربرد فراوانی دارد. ما هرگاه نقطه‌ای از مدار را از طریق مقاومت به ولتاژ ۵ ولت وصل کنیم اصطلاحا می‌گوییم که آن نقطه از مدار pull-up کرده ایم (به سمت بالا که همان یک منطقی است کشیده ایم.) رفتار مقاومت pull-up مشابه یک کِش است که از سقف آویزان شده باشد. ما اگر یک عروسک یا اسباب بازی را به انتهای کش آویزان کنیم آن را به سمت سقف بالا می‌کشد، اما اگر کسی عروسک را به سمت پایین بکشد، عروسک پایین می‌آید. مقاومت pull-up هم در مدارها همین نقش را دارد؛ هنگامی که نقطه ای از مدار را pull-up می‌کنیم تا مادامی که وسیله‌ای آن نقطه را پایین نکشد، از مقاومت pull-up جریانی نمی‌گذرد و بنابراین افت ولتاژ روی مقاومت صفر است و در نتیجه ولتاژ نقطه‌ای از مدار که به pull-up متصل شده، ۵ ولت می‌شود. اما هنگامی که وسیله‌ای نقطه‌ای که pull-up شده را پایین می‌کشد، جریانی از مقاومت pull-up عبور می‌کند و افت ولتاژی بر روی مقاومت pull-up می‌افتد.

در ادامه دو تا ترانزیستور را ابتدا به صورت سری با یکدیگر و سپس به صورت موازی با هم می‌بندیم و بررسی می‌کنیم که رابطه منطقی بین ورودیها و خروجی چگونه است.

در مدار شکل ۷–۱۶ اگر هر یک از ترانزیستورها خاموش باشد، سر خروجی نسبت به زمین قطع می‌شود که در این حالت سر خروجی از طریق مقاومت pull-up به ۵ ولت متصل می‌شود. زمانی که به هر دو سر ورودی ولتاژ ۵ ولت را اعمال کنیم هر دو ترانزیستور Tr1 و Tr2 روشن می‌شوند و سر خروجی را به زمین وصل می‌کنند و خروجی صفر می‌شود. بنابراین این مدار زمانی که هر دو ورودی یک باشند در خروجی خود عدد صفر را ایجاد می‌کند و در سایر موارد عدد یک را خروجی می‌دهد. رابطه بین ورودیها و خروجی در جدول پ نمایش داده شده است. این رابطه درست برعکس رابطه منطقی گیت AND است و بنابراین این مدار، گیت NAND است.

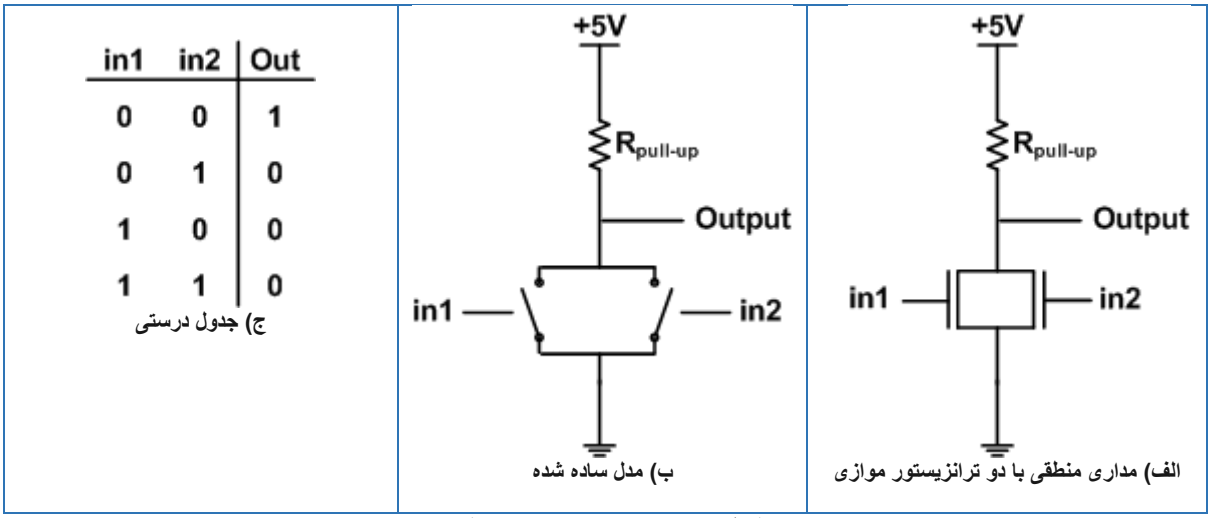


in1	in2	Out
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ج) جدول بیان کننده رابطه بین ورودیها و خروجی

شکل ۷-۱۶: دو ترانزیستور سری شده

حال دو تا ترانزیستور را به شکل زیر با هم موازی می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که خروجی مدار چه می‌شود. در مدار ۷–۱۷ اگر هر یک از ترانزیستورها روشن شوند، سر خروجی مدار به زمین متصل می‌شود. زمانی که هر دو ترانزیستور خاموش باشند سر خروجی از زمین جدا است و توسط مقاومت pull-up به ۵ ولت وصل می‌شود. پس رابطه بین ورودیها و خروجی این مدار به صورت جدول ج است که این رابطه درست برعکس OR است و بنابراین در این مدار رابطه NOR برقرار است.



in1	in2	Out
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ج) جدول درستی

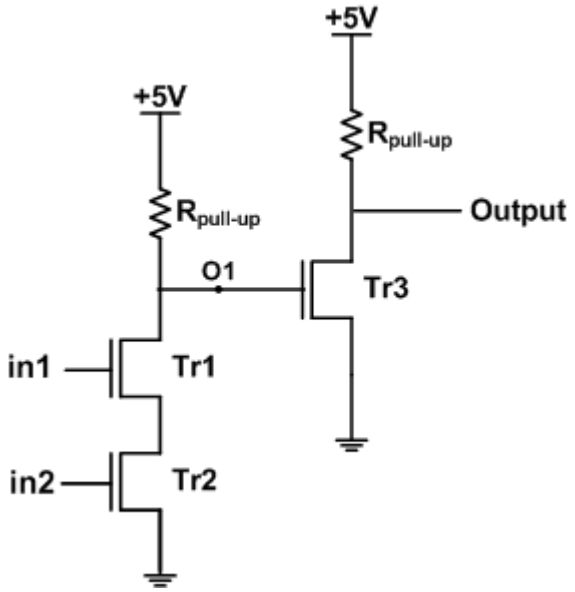
شکل ۷-۱۷: دو ترانزیستور موازی شده

همان طوری که در درس مدارهای منطقی فرا گرفته اید با استفاده از گیتهای NAND (و نیز NOR) می‌توانیم جمیع روابط منطقی را پیاده سازی کنیم و از آنجایی که توانستیم گیت NAND (و همچنین گیت NOR) را با استفاده از ترانزیستور درست کنیم پس می‌توانیم جمیع روابط منطقی را با استفاده ترانزیستور درست کنیم.

در مثالهای زیر روابط منطقی دیگری با استفاده از ترانزیستور پیاده سازی شده اند.

مثال ۷-۲: رابطه منطقی حاکم بین ورودیها و خروجی را در مدار زیر بیابید.

پاسخ:



در این مدار، اگر هر دو ترانزیستور Tr1 و Tr2 روشن شوند، نقطه O1 را به زمین وصل می‌کنند و ولتاژ O1 برابر با صفر می‌شود. در سایر موارد، اتصال گره O1 از زمین قطع است و ولتاژ آن ۵ ولت می‌باشد. بنابراین زمانی که هر دو ورودی یک باشند، ولتاژ گره O1 صفر می‌شود و در نتیجه O1 برابر با NAND ورودیهاست:

$$O1 = \overline{in1 \cdot in2}$$

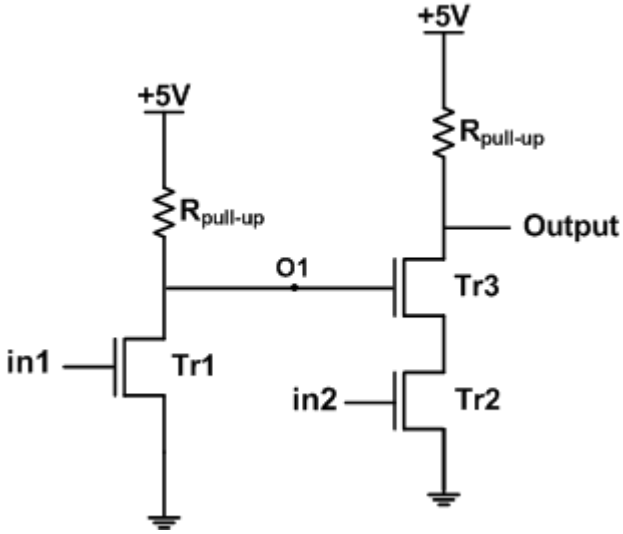
از طرف دیگر گره O1 به پایه گیت ترانزیستور Tr3 متصل شده است. هرگاه O1، صفر باشد ترانزیستور Tr3 خاموش است و خروجی از طریق pull-up به ۵ ولت وصل می‌شود و هرگاه O1، یک باشد، ترانزیستور روشن است و خروجی به زمین متصل می‌شود. پس خروجی به صورت NOT شدهء گره O1 است. پس:

$$Output = \overline{O1} = \overline{\overline{in1 \cdot in2}} = in1 \cdot in2$$

پس این مدار، گیت AND است.

مثال ۷-۳: رابطه منطقی حاکم بین ورودیها و خروجی را در مدار زیر بیابید.

پاسخ:



در این مدار، هرگاه in1، یک شود، ترانزیستور Tr1 روشن می‌شود و گره O1 زمین می‌شود و هرگاه in1 صفر باشد، ترانزیستور خاموش می‌شود و گره O1 به ۵ ولت وصل می‌شود. پس

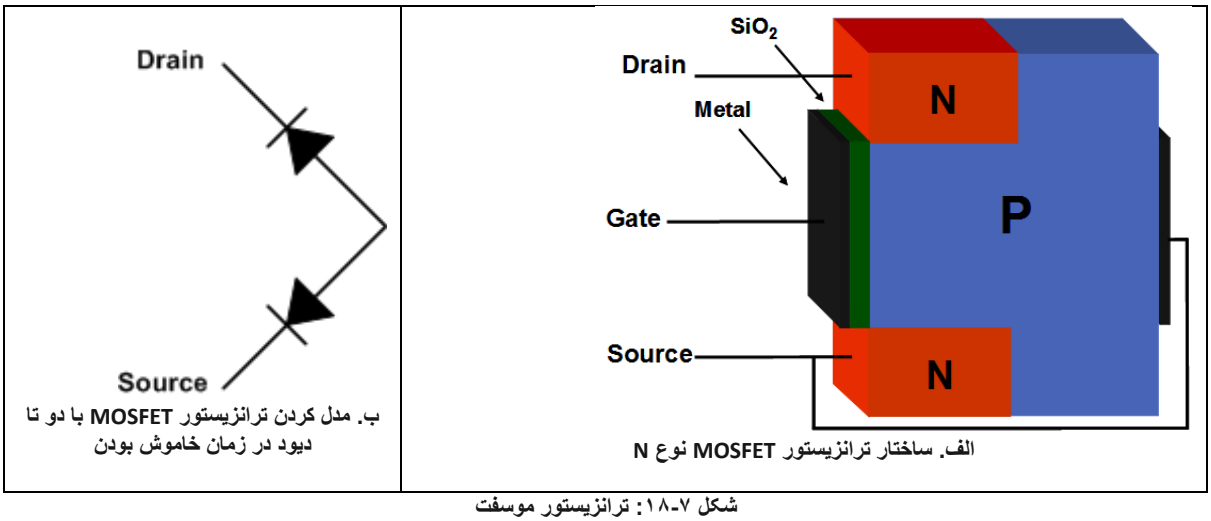
$$O1 = \overline{in1}$$

در طبقه دوم مدار، اگر هر دو ترانزیستور Tr2 و Tr3 روشن شوند، پایه خروجی صفر می‌شود و در سایر موارد خروجی یک است. پس:

$$Output = \overline{O1 \cdot in2} = \overline{\overline{in1} \cdot in2}$$

بخش ۷-۳: آشنایی با ساختار داخلی MOSFET نوع N

در شکل ۷-۱۸-الف ساختار ترانزیستور موسفت (MOSFET) نوع n را می‌بینید. همان طوری که می‌بینید دو تکه نیمه هادی از نوع n در دو طرف نیمه هادی نوع p قرار گرفته‌اند و صفحه‌ای عایق از جنس اکسید سیلیسیم (SiO_2) بر روی سطح آن قرار گرفته است و بر روی صفحه عایق، صفحه‌ای فلزی قرار گرفته است که صفحه عایق باعث عایق شدن بین صفحه فلزی و نیمه هادی p می‌شود و سه تا سیم به قسمتهای n و صفحه رسانا متصل شده‌اند. معمولا صفحه‌ای فلزی نیز پشت ماده p قرار می‌گیرد که به پایه source متصل می‌شود.



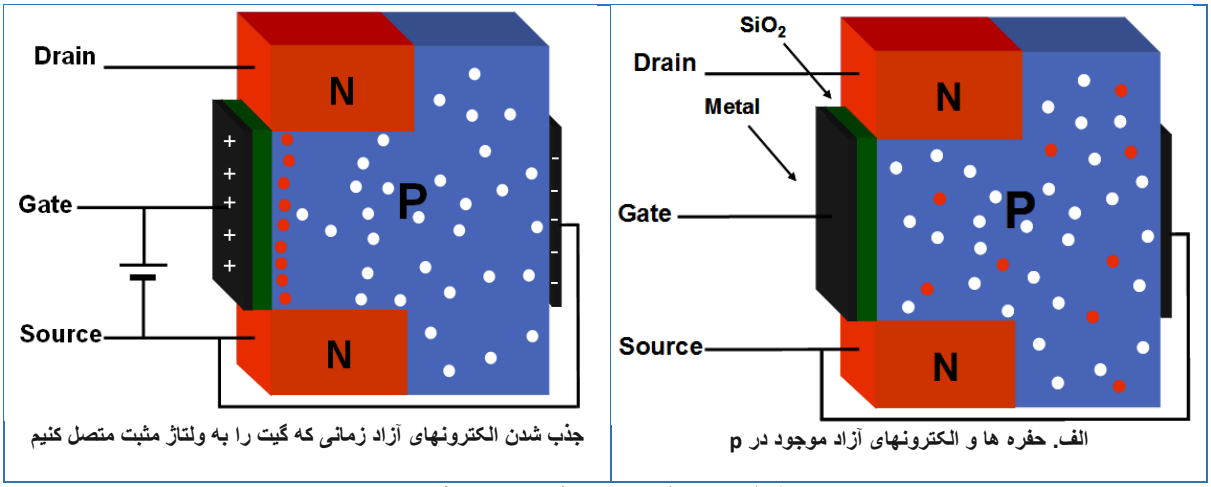
الف. ساختار ترانزیستور MOSFET نوع N

ب. مدل کردن ترانزیستور MOSFET با دو تا دیود در زمان خاموش بودن

شکل ۷-۱۸: ترانزیستور موسفت

در فصل دیود دیدید که از به هم چسبیدن n و p تشکیل می‌شود. پس می‌توانیم n متصل شده به درین را به همراه قسمتی از p به عنوان یک دیود فرض کنیم و n متصل به سورس را به همراه تکه دیگری از p به عنوان دومین دیود در نظر بگیریم که این دیودها در قسمت p به هم متصل شده‌اند. پس در عمل بین درین و سورس دو تا دیود به شکل فوق قرار دارند که در خلاف جهت هم قرار دارند و از خود جریانی را عبور نمی‌دهند.

درون نیمه هادی p تعداد زیادی حفره وجود دارد و تعداد اندکی الکترون آزاد وجود دارد. هنگامی که ما پایه گیت را به ولتاژ مثبت و پایه سورس را به ولتاژ منفی وصل کنیم، الکترونهای آزاد موجود در داخل p به سمت صفحه گیت که دارای بار مثبت است جذب می‌شوند. هرچه ولتاژ گیت بیشتر باشد، با نیروی قوی تری الکترونها به سمت گیت کشیده می‌شوند. اگر ولتاژ اعمال شده به پایه گیت به اندازه کافی زیاد باشد، کانالی از الکترونها در موازات صفحه گیت در ماده p تشکیل می‌شود که دو تکه n را به هم متصل می‌کند که در این حالت جریان می‌تواند از درون این کانال عبور کند و ترانزیستور روشن می‌شود. شکل زیر ترانزیستور را در حالتی که کانال تشکیل شده است نشان می‌دهد. اگر بخواهیم با تمثیلی تشکیل شدن کانال را توصیف کنیم، می‌توانیم قطعه p را به صورت دریاچه‌ای که بر روی آن تکه‌های یخ شناورند در نظر بگیریم و دو تکه n را در حکم دو تا اسکله تصور کنیم. در حالت عادی تکه های یخ در دریاچه پراکنده هستند و کسی نمی‌تواند از دریاچه بگذرد. اما اگر تکه‌های یخ را در بین دو اسکله جمع کنیم، می‌توانیم بر روی تکه‌های یخ پا بگذاریم و از اسکله‌ای به اسکله دیگر برویم.



شکل ۷-۱۹: الکترونها و حفره ها در موسفت

ولتاژ آستانه روشن شدن (threshold)

همان طوری که گفته شد برای اینکه کانالی بین درین و سورس تشکیل شود می‌بایست ولتاژ بین گیت و سورس به اندازه مشخصی برسد. به حداقل ولتاژی که می‌تواند باعث ایجاد شدن کانال در بین درین و سورس شود، ولتاژ آستانه (threshold) می‌گویند که در دیتاشیتها معمولا آن را Gate source threshold voltage می‌نامند و با نماد $V_{GS}(th)$ نشان می‌دهند و ما در این کتاب آن را به طور خلاصه به صورت V_T نشان می‌دهیم. ما تاکنون فرض می‌کردیم که هرگاه ۵ ولت به ترانزیستور بدهیم ترانزیستور روشن می‌شود. اما در عمل بدین صورت است که اگر ولتاژ گیت به اندازه V_T از ولتاژ پایه سورس بیشتر باشد، ترانزیستور روشن است و هرگاه کمتر از V_T از ولتاژ سورس بیشتر باشد، ترانزیستور خاموش است.

شکل ۷-۲۰ : ولتاژ آستانه

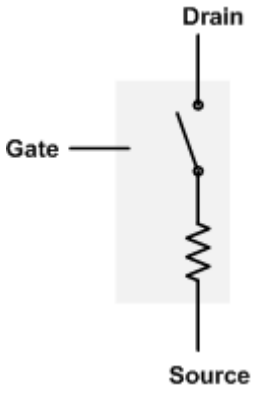
مقاومت R_{ON}

کانالی که تشکیل می‌شود را می‌توانیم به شکل یک مکعب مستطیل فرض کنیم. مقدار مقاومت در یک مکعب مستطیل از رابطه زیر پیروی می‌کند که با فاصله بین دو سر آن (l) و جنس ماده (μ) رابطه مستقیم دارد و با مساحت سطح مقطع (A) نسبت عکس دارد:

$$R = \frac{\mu l}{A}$$

بنابراین هنگامی که ترانزیستوری روشن می‌شود، کانال تشکیل شده کمی از خود مقاومت نشان می‌دهد که مقدار این مقاومت در ترانزیستورهای مختلف فرق می‌کند. مقدار مقاومت کانال را با R_{ON} و در برخی از دیتاشیتها با $R_{DS}(ON)$ نمایش می‌دهند. بنابراین اگر بخواهیم ترانزیستور را به طور دقیقتر مدل کنیم، می‌بایست مقاومتی به اندازه R_{ON} را با کلید سری در نظر

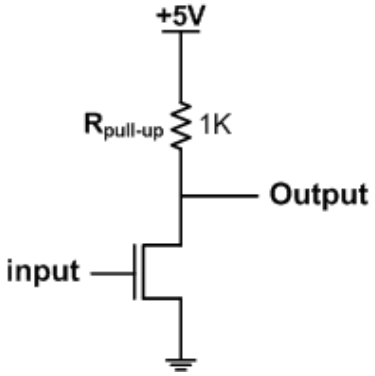
بگیریم (شکل زیر) که هرگاه ترانزیستور روشن می‌شود، کلیه بسته می‌شود و مقاومتی به اندازه R_{ON} بین دو سر درین و سورس قرار می‌گیرد.



شکل ۷-۲۱: مدل کردن ترانزیستور با مقاومت و کلید (مدل RS)

بخش ۷-۴: محاسبه V_{OH} و V_{OL} و V_{IH} و V_{IL} برای مدارهای ترانزیستوری

فرض کنید که با استفاده از ترانزیستوری که ولتاژ آستانه آن ۲ ولت و R_{ON} در آن ۳۰ اهم است، یک گیت NOT به شکل زیر بسته‌ایم و می‌خواهیم V_{IL} و V_{IH} و V_{OL} و V_{OH} را برای این گیت محاسبه کنیم.

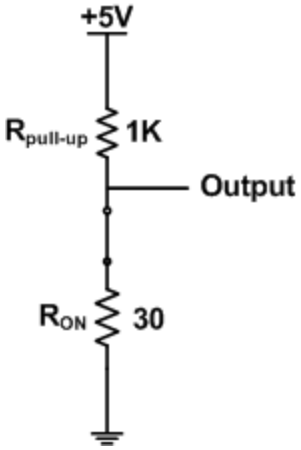


شکل ۷-۲۲: گیت not

این ترانزیستور هرگاه ولتاژ ورودی بیشتر از ولتاژ آستانه باشد، روشن می‌شود. همچنین هرگاه ولتاژ ورودی کمتر از ولتاژ آستانه باشد خاموش می‌شود. بنابراین ولتاژهای بیشتر از ولتاژ آستانه را یک فرض می‌کند و ولتاژ آستانه کمترین ولتاژی است که به عنوان یک فرض می‌کند و ولتاژ V_{IH} برابر با V_T (که در این مثال ۲ ولت است) می‌باشد. به ازای ولتاژهای کمتر از ولتاژ آستانه نیز ترانزیستور خاموش است و ورودی را صفر می‌گیرد و بنابراین V_{IL} نیز برابر با V_T است و برابر با ۲ ولت می‌باشد.

در این مدار اگر پایه خروجی را به وسیله‌ای متصل کنیم، وسیله‌ای که به پایه خروجی متصل می‌کنیم می‌تواند از پایه خروجی جریان بکشد و در ولتاژ پایه خروجی تاثیر بگذارد و بنابراین در دیتاشیت مقدار V_{OH} و V_{OL} را به همراه حداکثر جریانی که مجازیم از آی سی بکشیم، اعلام می‌کنند. اما در گام نخست جهت سهولت فرض می‌کنیم که قرار نیست جریانی از پایه خروجی کشیده شود و مقدار V_{OL} و V_{OH} را در حالتی که پایه خروجی آزاد است محاسبه می‌کنیم.

در این مدار هنگامی که ترانزیستور خاموش باشد، پایه خروجی از طریق مقاومت pull-up به ۵ ولت متصل می‌شود. بنابراین ولتاژ خروجی در زمانی که این مدار یک منطقی را بیرون دهد ۵ ولت است و V_{OH} برابر با ۵ ولت است.



هنگامی که ترانزیستور روشن شود، مدار به شکل زیر می‌شود که با استفاده از رابطه تقسیم ولتاژ در مدارهای سری، ولتاژ خروجی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$V_{output} = \frac{R_{ON}}{R_{pullup}+R_{ON}} \times 5V = \frac{30}{1030} \times 5 \approx ۰.۱۴۵\text{V}$$

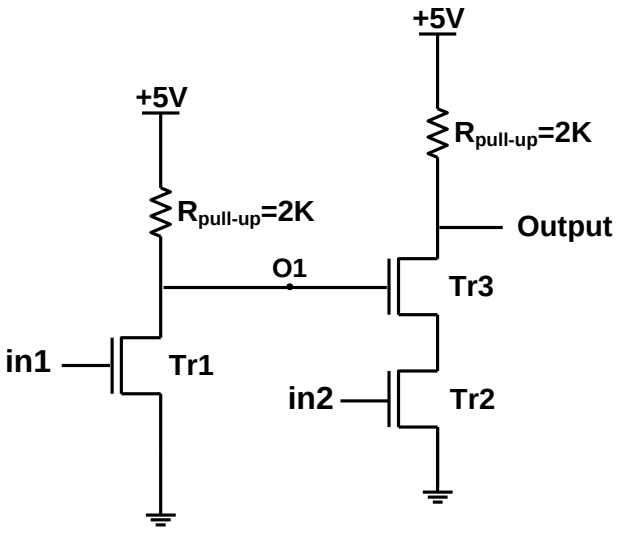
بنابراین V_{OL} در این مدار برابر با 0.145 ولت است.

به عنوان نمونه‌های دیگر مثالهای زیر را ببینید.

مثال ۴-۷

فرض کنید که در ترانزیستورهای به کار رفته در مدار زیر ولتاژ آستانه 2.5 و مقاومت R_{ON} برابر با ۵۰ اهم باشد. مقدار V_{IL} و V_{IH} و V_{OL} و V_{OH} را در این مدار با فرض اینکه از پایه خروجی جریانی کشیده نشود محاسبه کنید.

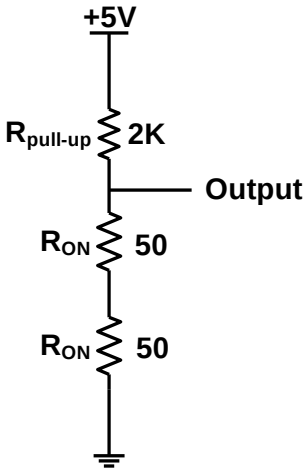
پاسخ:



این ترانزیستور ولتاژهای کمتر از آستانه را صفر در نظر می‌گیرد و ولتاژهای بیشتر از آستانه را یک در نظر می‌گیرد. بنابراین V_{IL} و V_{IH} برابر با 2.5 ولت هستند.

در این مدار هنگامی که هر یک از ترانزیستورهای ۲ یا ۳ خاموش باشند، ارتباط خروجی از زمین قطع می‌شود و پایه خروجی از طریق مقاومت pull-up به ۵ ولت متصل می‌شود و از آنجایی که از پایه خروجی جریانی کشیده نمی‌شود، ولتاژ ۵ ولت به خروجی اعمال می‌شود. پس V_{OH} برابر با ۵ ولت است.

هنگامی که هر دو ترانزیستور ۲ و ۳ روشن باشند، سر خروجی را به سمت زمین می‌کشند. در این حالت مقاومت pull-up به همراه مقاومتهای R_{ON} موجود در ترانزیستورها، مدار زیر را تشکیل می‌دهند. بنابراین ولتاژ V_{OL} را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:



$$V_{OL} = V_{Output} = 5 \times \frac{50 + 50}{2K + 50 + 50} = 5 \times \frac{100}{2100} = 0.238$$

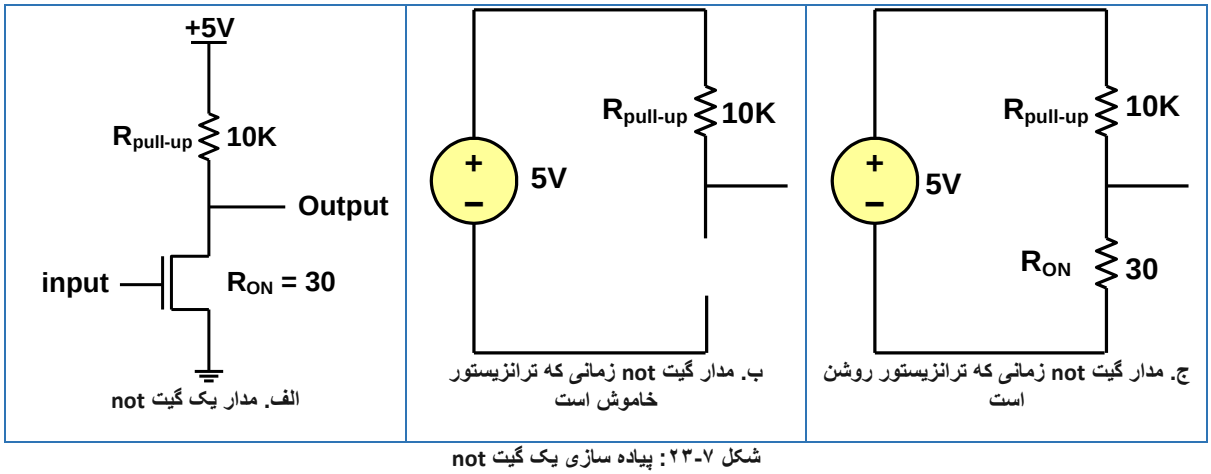
بخش ۷-۵: بررسی برخی خصوصیات الکتریکی گیتهای منطقی

در این قسمت می‌خواهیم خصوصیات الکتریکی گیتهایی که با استفاده از ترانزیستور می‌سازیم را بررسی کنیم و ببینیم که توان مصرفی آنها چقدر است؛ قدرت آنها در روشن کردن وسایل الکتریکی چگونه است؛ پایه‌های خروجی قادرند که چقدر جریان فراهم کنند و پایه‌های ورودی گیتها چه میزان جریان لازم دارند تا تحریک شوند.

محاسبه توان مصرفی در یک مدار دیجیتال

در فصل یک با روابط مربوط به توان آشنا شدید و دیدید که P=VI و $P = \frac{V^2}{R}$ و $P = RI^2$. بنابراین با استفاده از روابط توان می‌توانیم توان مصرفی گیتها را محاسبه کنیم.

به طور مثال تصور کنید که با استفاده از ترانزیستور که R_{ON} برای آن ۳۰ اهم است یک گیت not به شکل زیر ایجاد کنیم. (شکل ۷-۲۳- الف را ببینید.) هنگامی که ورودی گیت صفر باشد، ترانزیستور خاموش است، مدار به شکل ۷-۲۳-ب در می‌آید. در این حالت با فرض اینکه سر خروجی آزاد باشد، هیچ جریانی بین سر ۵ ولت و زمین منبع تغذیه نمی‌گذرد و با توجه به اینکه $P=RI^2$ پس توان مصرفی این گیت در این حالت صفر است.



شکل ۷-۲۳: پیاده سازی یک گیت not

حال اگر ولتاژ ۵ ولت را به ورودی گیت اعمال کنیم ترانزیستور روشن می‌شود و مدار ۷-۲۳-ج به وجود می‌آید. در این مدار مقاومتهای $R_{Pull-up}$ و R_{ON} با هم سری هستند. پس مجموع مقاومتی که بین ۵ ولت و زمین قرار دارد برابر است با:

$R_{total} = R_{pull\text{-}up} + R_{ON} = 10K + 30 = 10030$

و توان مصرفی برابر است با:

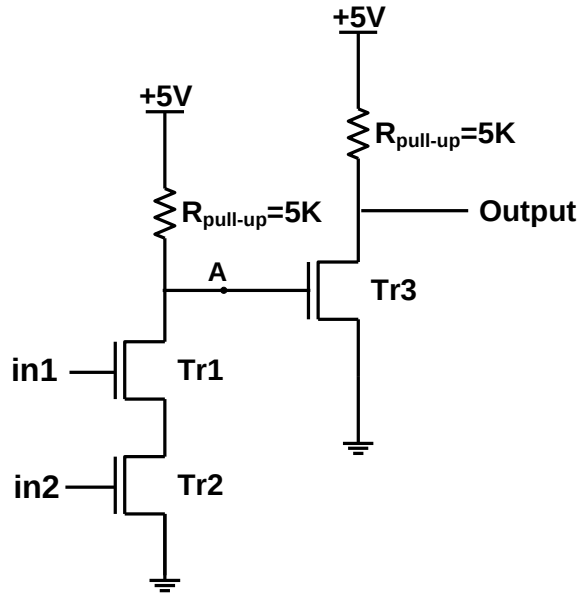
$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{5^2}{10030} = \frac{25}{10030} = 2.4mW$$

بنابراین توان مصرفی گیت فوق زمانی که ورودی آن صفر باشد، صفر وات است و هنگامی که ورودی آن یک شود، 2.4 میلی وات می‌گردد و حداکثر توان مصرفی این مدار 2.4mW می‌باشد.

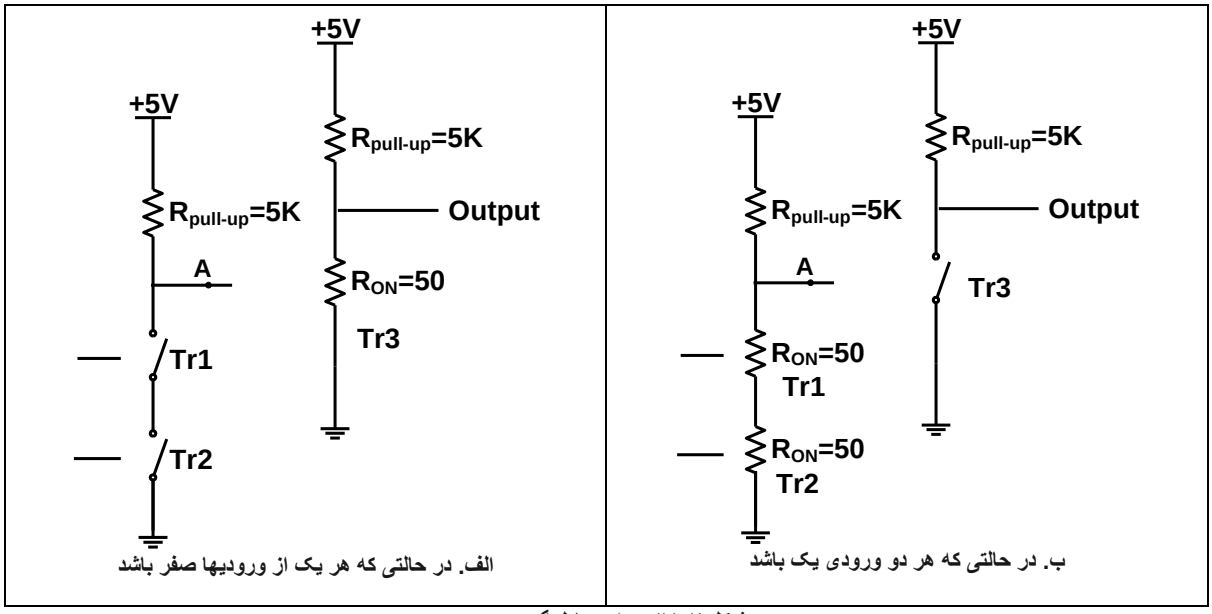
به عنوان نمونه‌ای دیگر، مدار AND زیر را با فرض اینکه R_{ON} برابر با ۵۰ اهم باشد، در نظر بگیرید.

در این مدار اگر هر یک از ورودیها خاموش باشد، ترانزیستور مربوط به آن ورودی خاموش می‌شود و اتصال گره A از زمین قطع می‌گردد و جریانی از طبقه اول مدار عبور نمی‌کند و توان مصرفی در طبقه اول، صفر است. (شکل ۲۵-۷-الف را ببینید.) اما پایه گیت از ترانزیستور Tr3 از طریق مقاومت pull-up به ۵ ولت متصل می‌شود که در نتیجه ترانزیستور Tr3 روشن می‌شود و سر خروجی را به زمین متصل می‌کند. بنابراین در طبقه دوم توان مصرفی برابر است با:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{5^2}{5K + 50} = \frac{25}{5050} = 4.95mW$$



شکل ۷-۲۴: مدار یک گیت AND



شکل ۷-۲۵: مدار معادل گیت AND

در این گیت هنگامی که هر دو ورودی یک باشند، هر دو ترانزیستور Tr1 و Tr2 روشن می‌شوند و گره A را به زمین متصل می‌کنند. بنابراین مدار به شکل ۷–۲۵–ب می‌شود و توان مصرفی در طبقه اول مدار به صورت زیر است:

$$R = 50 + 50 + 5000 = 5100$$

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{25}{5100} = 4.9mW$$

زمانی که طبقه اول مدار روشن باشد و گره A به زمین متصل شود، ترانزیستور Tr3 خاموش است و مدار طبقه دوم به صورت مدار باز در می‌آید و بنابراین توان مصرفی در طبقه دوم صفر می‌شود و مجموع توان مصرفی برابر است با:

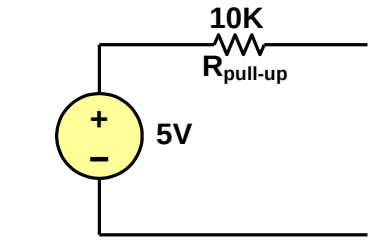
$$4.9\ mW + 0\ W = 4.9\ mW$$

بنابراین حداکثر توان مصرفی در این گیت and زمانی است که هر یک از ورودیها خاموش باشد که در این حالت توان مصرفی برابر 4.95mW می‌باشد.

مدل کردن پایه خروجی گیت به صورت منبع ولتاژ غیر ایده آل

فرض کنید که بخواهیم قدرت گیت not نمایش داده شده در شکل ۷–۲۳–الف را در روشن کردن وسایل الکتریکی ارزیابی کنیم. برای اینکه مدار ساده تر شود، می‌توانیم معادل تونن مدار را به دست آوریم:

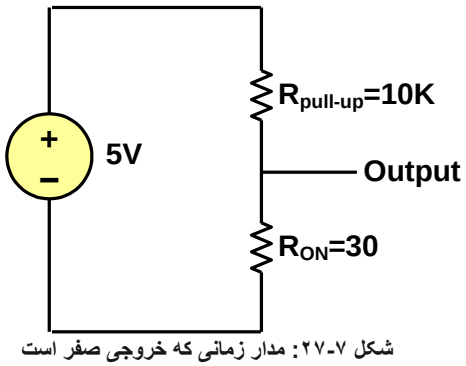
هنگامی که ترانزیستور خاموش باشد، پایه خروجی از طریق مقاومت pull-up به ۵ ولت وصل می‌شود و بنابراین مدار در حکم منبع تغذیه ۵ ولت با مقاومت داخلی pull-up عمل می‌کند.



شکل ۷-۲۶: معادل تونن زمانی که خروجی یک است

و هنگامی که ترانزیستور روشن شود، پایه خروجی توسط ترانزیستور به زمین متصل می‌شود. در این حالت مدار زیر به وجود می‌آید که ولتاژ تونن آن برابر است با:

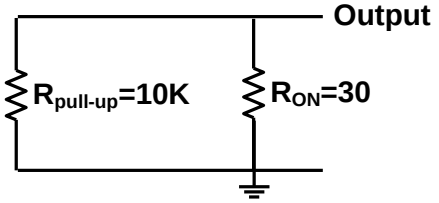
$$V_{Th} = \frac{30}{10K + 30} \times 5 = \frac{30}{10030} \times 5 = 15mV$$



شکل ۷-۲۷: مدار زمانی که خروجی صفر است

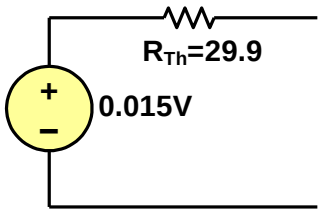
برای به دست آوردن مقاومت تونن، منبع ولتاژ را خاموش می‌کنیم و به جای آن سیم می‌گذاریم. بنابراین مقاومت تونن برابر است با:

$$R_{Th} = \frac{30 \times 10K}{30 + 10K} = \frac{300K}{10030} = 29.9$$



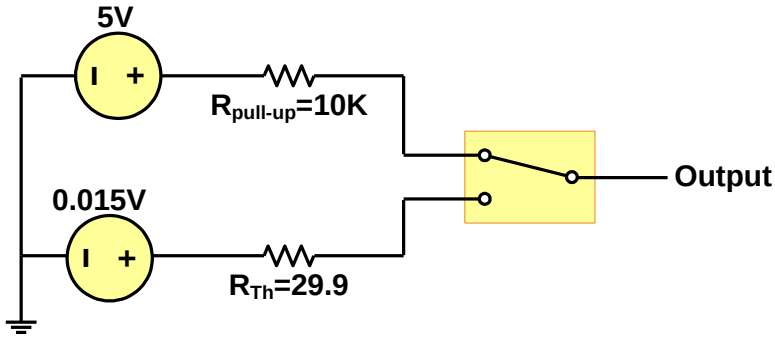
شکل ۷-۲۸: مقاومت تونن

بنابراین می‌توانیم خروجی مدار را به شکل زیر مدل کنیم.



شکل ۷-۲۹: معادل تونن در حالت روشن بودن ترانزیستور

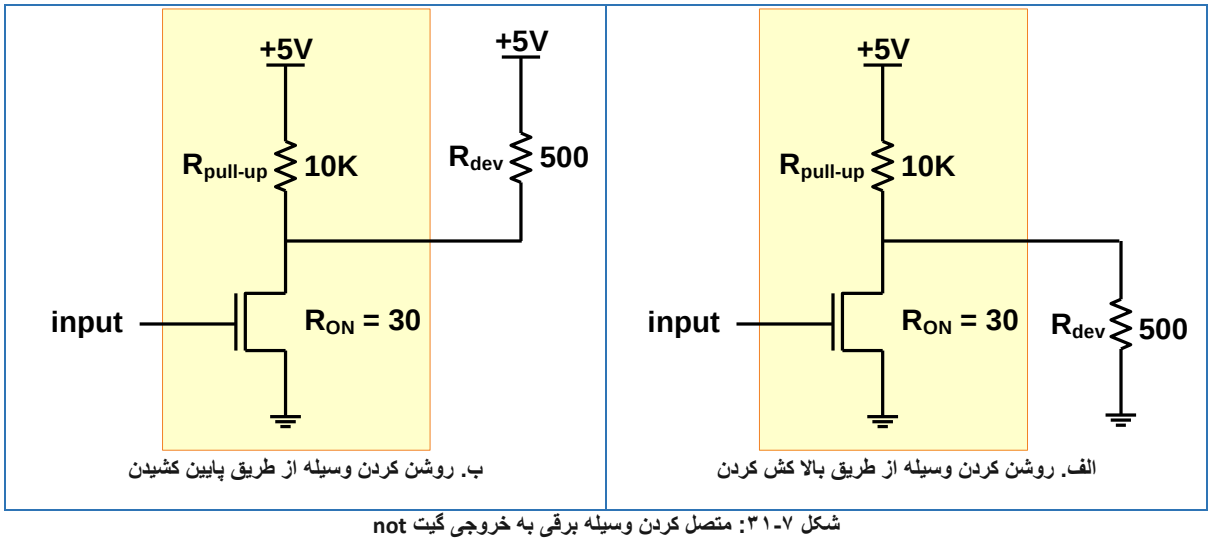
اگر دو مدار تونن را در هر ادغام کنیم به شکل زیر در می‌آیند:



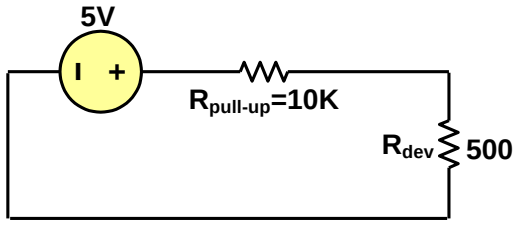
شکل ۷-۳۰: مدلی ساده برای خروجی گیت not

همان طوری که در شکل فوق می‌بینید، زمانی که ترانزیستور خاموش است، مقاومت منبع تغذیه ۱۰ کیلو و زمانی که ترانزیستور روشن است مقاومت داخلی آن 29.9 اهم است. بنابراین قدرت این گیت در زمین کردن خروجی بیشتر است.

به طور مثال فرض کنید که یک وسیله برقی ۵ ولت با مقاومت داخلی ۵۰۰ اهم را بخواهیم به خروجی این گیت not متصل کنیم. این وسیله را می‌توانیم به دو صورت نمایش داده شده در شکل زیر به خروجی گیت not متصل کنیم. در شکل الف هنگامی که خروجی گیت ۵ ولت باشد، وسیله برقی روشن می‌شود و در شکل ب هنگامی که خروجی گیت صفر باشد وسیله روشن می‌شود.



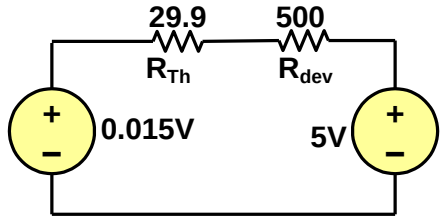
شکل ۷-۳۱: متصل کردن وسیله برقی به خروجی گیت not



در شکل الف هنگامی که ترانزیستور داخل گیت خاموش باشد، ولتاژ ۵ ولت از طریق مقاومت ۱۰ کیلو، به مقاومت ۵۰۰ اهمی وسیله برقی متصل می‌شود. (شکل روبرو که حاصل اتصال مقاومت ۵۰۰ اهم به شکل ۷-۲۷ است) در این حالت ولتاژی که به دو سر وسیله می‌رسد برابر است با:

$$V_{device} = \frac{R_{dev}}{R_{dev} + R_{pull-up}} \times 5 = \frac{500}{500 + 10K} \times 5 = 0.238$$

بنابراین ولتاژی که به دو سر وسیله برقی می‌رسد خیلی کمتر از ۵ ولت است و وسیله روشن نمی‌شود.



در شکل ب، هنگامی که خروجی صفر ولت شود، مقاومت داخلی 29.9 با مقاومت ۵۰۰ اهمی وسیله برقی سری می‌شوند. (شکل روبرو که حاصل اتصال مقاومت ۵۰۰ اهم به شکل ۷-۲۹ است.) در این حالت ولتاژی که به دو سر وسیله می‌رسد برابر است با:

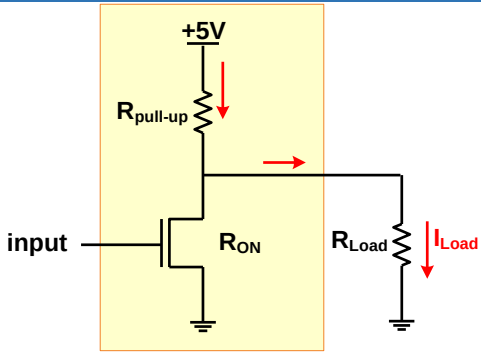
$$V_{dev} = \frac{R_{dev}}{R_{dev} + R_{Th}} \times (5 - 0.015) = \frac{500}{529} \times 4.85 = 4.58$$

در این حالت ولتاژی که به دو سر وسیله برقی می‌افتد 4.58 ولت است و احتمالا وسیله برقی روشن می‌شود.

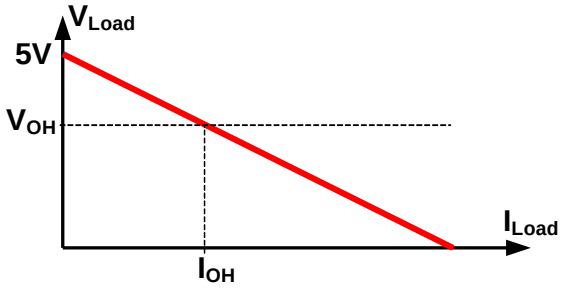
بنابراین این مدار not با قدرت خوبی قادر است که خروجی را به زمین متصل کند. (اصطلاحا pull-down کند.) اما در متصل کردن خروجی به ۵ ولت ضعیف است. (قدرت pull-up کردن آن کم است.)

آشنایی با I_{OH} و I_{OL}

شکل زیر را در نظر بگیرید. هنگامی که این گیت، مقدار یک را در خروجی می‌دهد، ولتاژ ۵ ولت از طریق مقاومت pull-up به پین خروجی متصل می‌شود. پس اگر به پین آی سی مقاومتی متصل کنیم، ولتاژی بر روی مقاومت داخلی آی سی می‌افتد و ولتاژ خروجی آی سی افت می‌کند و هر چقدر اندازه مقاومتی که به خروجی متصل کرده ایم کوچکتر باشد، جریان بیشتری کشیده می‌شود و ولتاژ پین کمتر می‌شود. به گونه ای که حتی ممکن است ولتاژ پین کمتر از V_{OH} شود. بیشترین جریانی که خروجی آی سی می‌تواند فراهم کند، بدون اینکه ولتاژ آن از V_{OH} کمتر شود، را با I_{OH} نمایش می‌دهند.



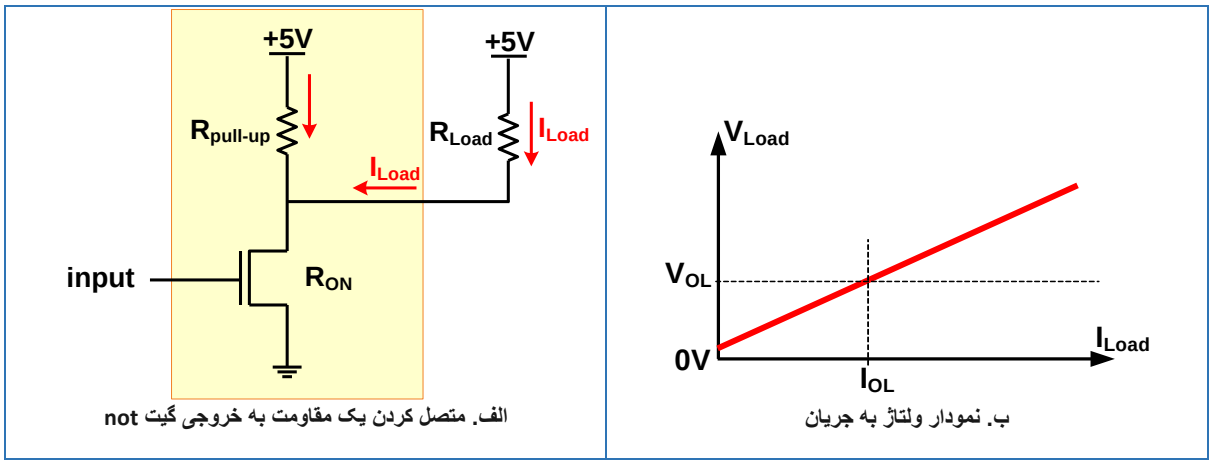
الف. متصل کردن یک مقاومت به پایه خروجی گیت not



ب. نمودار ولتاژ به جریان

شکل ۷-۳۲: مفهوم I_{OH}

همچنین هنگامی که مقاومتی را بین سر خروجی یک گیت و ولتاژ ۵ ولت قرار دهیم، مداری مشابه مدار زیر به وجود می‌آید. در این مدار هنگامی که خروجی این آی سی، صفر شود، پین خروجی از طریق مقاومت R_{ON} به زمین متصل می‌شود. پس اگر مقاومتی بین پین خروجی و ولتاژ ۵ ولت باشد، جریانی از مقاومت R_{ON} می‌گذرد و ولتاژی بر روی R_{ON} افت می‌کند و هر چه مقدار مقاومت کمتر باشد، جریان بیشتری از R_{ON} می‌گذرد و ولتاژ پایه خروجی بیشتر می‌شود. بیشترین جریانی که خروجی آی سی می‌تواند فراهم کند، بدون آنکه ولتاژ خروجی بیشتر از V_{OL} شود را با I_{OL} نمایش می‌دهند.



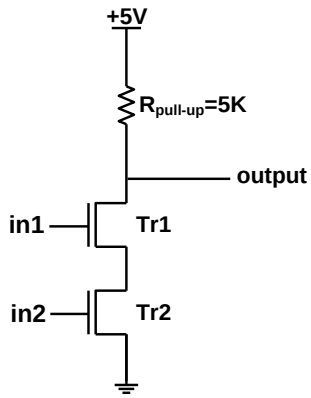
الف. متصل کردن یک مقاومت به خروجی گیت not

ب. نمودار ولتاژ به جریان

شکل ۷-۳۳: مفهوم I_{OL}

معمولا مقادیر I_{OL} و I_{OH} از جمله پارامترهایی است که در دیتاشیت هر آی سی اعلام می‌کنند.

مثال ۷-۳: در مدار زیر با فرض اینکه V_{OH} را برابر با 4.7 ولت بگیریم، مقدار I_{OH} را حساب کنید.



پاسخ:

زمانی خروجی یک می‌شود که ترانزیستورها خاموش باشند. در این حالت، جریان خروجی مستقیما از مقاومت pull-up می‌گذرد. پس می‌توانیم رابطه زیر را بین جریان خروجی و ولتاژ سر خروجی بیان کنیم:

$$5 - RI_{OUT} = V_{OUT}$$

هر چه جریان بیشتری کشیده شود، ولتاژ خروجی بیشتر افت می‌کند. بنابراین I_{OH} زمانی از خروجی کشیده می‌شود که ولتاژ خروجی تا V_{OH} افت کرده باشد:

$$5 - RI_{OH} = V_{OH} \rightarrow 5 - 5000I_{OH} = 4.7 \rightarrow I_{OH} = 0.3/5000 = 60\mu A$$

آشنایی با جریان ورودی گیت (I_{IL} و I_{IH})

یکی دیگر از خصوصیات الکتریکی که در مورد گیتهای منطقی مطرح است، میزان جریانی است که پایه ورودی می‌کشد تا تحریک شود. اگر جریانی که گیت از ورودی می‌کشد کم باشد، در آن صورت با استفاده از هر مداری می‌توانیم به سهولت جریان مورد نیاز برای تحریک شدن ورودی را فراهم کنیم و دست ما برای طراحی کردن مداری که به ورودی گیت متصل می‌کنیم باز است. اما اگر جریان مورد نیاز زیاد باشد، خیلی از وسایل قادر به تحریک کردن ورودی گیت نخواهند بود و در طراحی محدودیتهایی برای ما ایجاد خواهد کرد.

جریانی که پایه ورودی گیت می‌کشد تا صفر شود را I_{IL} (Low Input Current) و جریانی که پایه ورودی می‌کشد تا یک شود را I_{IH} (High Input Current) می‌گویند.

در ترانزیستورهای MOSFET با توجه به اینکه لایه‌ای عایق زیر پایه gate قرار دارد، بنابراین جریانی که پایه گیت از ورودی می‌کشد، در حد صفر است و در کل جریانی که در گیتهای خانواده های CMOS و NMOS از ورودی کشیده می‌شود، ناچیز است. اما در گیتهای خانواده TTL که با استفاده از ترانزیستورهای BJT ساخته می‌شوند، لایه عایق وجود ندارد و جریانی از پایه ورودی کشیده می‌شود.

به طور نمونه در زیر جدول مشخصات الکتریکی مربوط به آی سی ATmega32 را ملاحظه می‌کنید که از دیتاشیت این آی سی کپی شده است. با توجه به اینکه این آی سی می‌تواند با ولتاژ ۲.۷ تا ۵.۵ ولت کار کند، مقادیر V_{OL} و V_{OH} به ازای دو حالتی که پایه VCC به ۳ ولت و ۵ ولت متصل شود، اعلام شده است.

Symbol	Parameter	Condition	Min	Typ	Max	Units
V_{IL}	Input Low Voltage except XTAL1 and RESET pins	V_{CC}=2.7V - 5.5V	-0.5		0.2 V_{CC}(1)	V
V_{IH}	Input High Voltage except XTAL1 and RESET pins	V_{CC}=2.7V - 5.5V	0.6 V_{CC}(2)		V_{CC} + 0.5	V
V_{OL}	Output Low Voltage(3) (Ports A,B,C,D, E, F, G)	I_{OL} = 20 mA, V_{CC} = 5V I_{OL} = 10 mA, V_{CC} = 3V			0.7 0.5	V V
V_{OH}	Output High Voltage(4) (Ports A,B,C,D, E, F, G))	I_{OH} = -20 mA, V_{CC} = 5V I_{OH} = -10 mA, V_{CC} = 3V	4.2 2.2			V V
I_{IL}	Input Leakage Current I/O Pin	Vcc = 5.5V, pin low (absolute value)			1.0	µA
I_{IH}	Input Leakage Current I/O Pin	Vcc = 5.5V, pin high (absolute value)			1.0	µA
R_{RST}	Reset Pull-up Resistor		30		60	kΩ
R_{PEN}	PEN Pull-up Resistor		30		60	kΩ
R_{PU}	I/O Pin Pull-up Resistor		20		50	kΩ

جدول ۷-۱: مشخصات الکتریکی مربوط به آی سی ATmega32

مفهوم Fan out (اختیاری)

اصطلاح Fan out مشخص می‌کند که خروجی هر آی سی را می‌توانیم حداکثر به ورودی چند تا آی سی از همان خانواده متصل کنیم و برای محاسبه کردن آن از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{Fan out} = \min(I_{OH}/I_{IH}, I_{OL}/I_{IL})$$

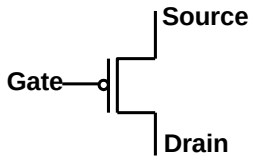
برای اطلاعات بیشتر درباره مفهوم Fan out می‌توانید به آدرس زیر از سایت Wikipedia مراجعه کنید:

http://en.wikipedia.org/wiki/Fan_out

بخش ۷-۶: تکنولوژی CMOS و بهبود مشخصات الکتریکی خروجی (اختیاری)

در قسمتهای قبل دیدید که هر چه مقدار مقاومت pull-up بیشتر باشد، مقدار مقاومت داخلی گیت برای حالتی که می‌خواهد مقدار یک را در خروجی بدهد، بیشتر می‌شود و بنابراین مقدار I_{OH} کمتر می‌شود. اما اگر مقدار مقاومت pull-up کم باشد، زمانی که ترانزیستور روشن می‌شود و می‌خواهد خروجی را زمین کند، مقاومت pull-up، جریان زیادی را از ترانزیستور عبور می‌دهد و ولتاژ زیادی بر روی ترانزیستور افت می‌کند و ولتاژ خروجی به جای اینکه صفر باشد، بیشتر از صفر می‌شود و در عین حال توان مصرفی داخل آی سی، افزایش می‌یابد. خوب می‌شد اگر به جای مقاومت pull-up، وسیله دیگری وجود داشت که هرگاه می‌خواهیم، مقدار یک را به خروجی اعمال کنیم، پایه خروجی را به ۵ ولت متصل کند و زمانی که

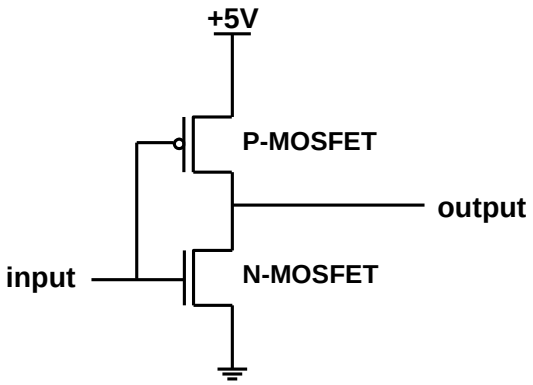
می‌خواهیم خروجی را زمین کنیم، مثل کلید باز عمل کند. عملا ایده فوق باعث شد که در آی سی های خانواده CMOS، به جای مقاومت pull-up، از ترانزیستور MOSFET نوع P استفاده شد. در زیر یک ترانزیستور P-MOSFET را می‌بینید. همان طور که می‌بینید برای اینکه نوع P از نوع N تفکیک داده شود یک دایره کوچک بر روی پایه Gate آن کشیده می‌شود. در MOSFET نوع P هنگامی که ولتاژ Gate از ولتاژ Source به اندازه V_T کمتر باشد، ترانزیستور روشن می‌شود و در غیر این صورت، خاموش است.



شکل ۷-۳۴: موسفت نوع P

در زیر یک گیت NOT را می‌بینید. هنگامی که ولتاژ ورودی صفر ولت است، در ترانزیستور نوع P، ولتاژ پایه Gate به اندازه ۵ ولت از Source کمتر است و بنابراین ترانزیستور نوع P روشن می‌شود و خروجی را به ۵ ولت وصل می‌کند.

اما هنگامی که ورودی به ۵ ولت متصل شود، در ترانزیستور نوع P، ولتاژ پایه Gate و Source با هم برابر می‌شود و ترانزیستور نوع P خاموش می‌شود و با توجه به اینکه در ترانزیستور نوع N، ولتاژ پایه Gate از Source به اندازه ۵ ولت بیشتر است، ترانزیستور نوع N روشن می‌شود و پایه خروجی را به زمین متصل می‌کند.



شکل ۷-۳۵: یک گیت NOT پیاده سازی شده با تکنولوژی CMOS

توان مصرفی در CMOS

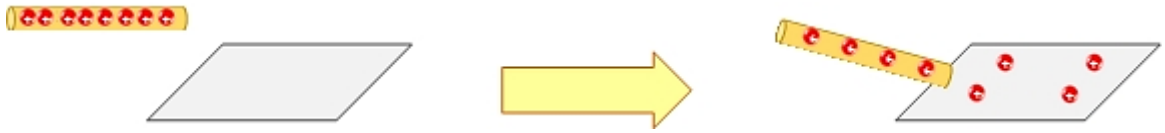
در آی سی های CMOS، زمانی که ترانزیستور P روشن است، ترانزیستور N خاموش است و زمانی که ترانزیستور N روشن است، ترانزیستور P خاموش است و بنابراین مسیری بین ولتاژ تغذیه و زمین به وجود نمی‌آید و توان مصرفی خیلی کم است. فقط در لحظه‌ای که ورودی تغییر وضعیت می‌دهد، برای مدت اندکی، یکی از ترانزیستورها که در حال خاموش شدن است در وضعیت نیمه روشن قرار می‌گیرد و ترانزیستوری که در حال روشن شدن است نیز در حالت نیمه روشن قرار می‌گیرد که در این لحظه، جریانی بین ولتاژ تغذیه و زمین به وجود می‌آید و توان مصرفی CMOS در این لحظه افزایش می‌یابد. بنابراین میزان برق مصرفی آی سی های CMOS به میزان دفعاتی که وضعیتشان تغییر می‌کند بستگی دارد و به همین خاطر است که هر قدر فرکانس کاری کامپیوتر را بالا ببریم، مصرف برق آن افزایش می‌یابد و به همین خاطر است که در گوشی ها و لپ‌تاپ‌ها، زمانی که حجم اطلاعاتی که CPU لازم است پردازش کند کم است، فرکانس کاری CPU کاهش می‌یابد تا توان برق مصرفی کاهش یابد.

فصل هشتم: خازن (Capacitor) و کاربردهای آن

بخش ۸-۱: آشنایی با خازن

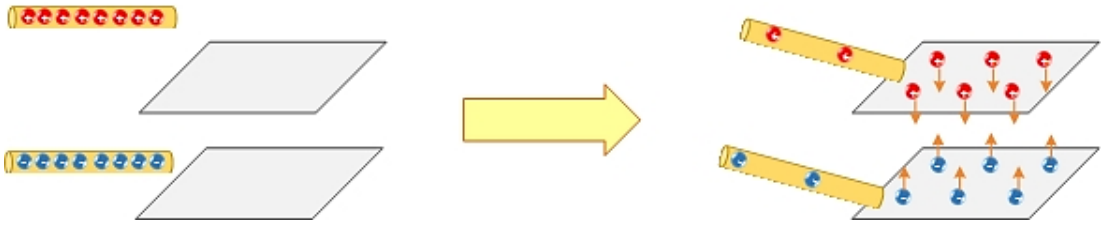
ساختار خازن

تصور کنید که یک میله فلزی باردار را به یک ورق فلزی بدون بار متصل کنیم. با توجه به اینکه بارهای همسان یکدیگر را دفع می کنند و مایلند از همدیگر فاصله بگیرند، بنابراین بارهای الکتریکی در سطح ورق فلزی و میله پخش میشوند.



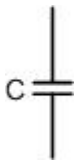
شکل ۸-۱: اتصال یک میله باردار به ورق فلزی بدون بار، موجب پخش شدن بار می شود

حال اگر دو ورقه رسانا نزدیک هم قرار داشته باشند و ما دو میله باردار، یکی با بار مثبت و دیگری با بار منفی را به این دو صفحه متصل کنیم، همانند قبل بارهای الکتریکی بر روی صفحات پخش می شوند تا از یکدیگر فاصله بگیرند. اما با این تفاوت که چون این دو صفحه در نزدیکی یکدیگر قرار گرفته اند و بارهای ناهمسان یکدیگر را می ربایند. بنابراین علاقه بارها برای اینکه بر روی ورقه ها بروند بیشتر می شود. زیرا از یک سو از بارهای همسان به خود فاصله پیدا می کنند و از سوی دیگر به بارهای مخالف نزدیک می شوند. هر چه این دو ورق فلزی به یکدیگر نزدیکتر باشند، جاذبه بین بارهای مخالف بیشتر می شود و علاقه بارها برای رفتن بر روی صفحات بیشتر می شود.



شکل ۸-۲: دو صفحه فلزی نزدیک به هم، پذیرای تعداد بیشتری از بارهای مخالف است

اصطلاحا به دو جسم رسانا که بین آنها عایق باشد خازن می گویند که با نماد زیر نمایش داده می شود.



شکل ۸-۳: نماد خازن

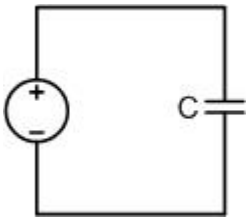
ظرفیت خازن

زمانی که میله بارداری را به صفحه فلزی ای بزنیم، هر چه صفحه بزرگتر باشد، پذیرای تعداد بیشتری از بارهای الکتریکی خواهد بود. همچنین فاصله دو صفحه خازن هر چه به هم نزدیکتر باشد کشش قوی تری بین بارهای مخالفی که روی دو صفحه هستند به وجود می آید و بارها علاقه بیشتری به رفتن بر روی صفحات خازن خواهند داشت. بنابراین هر چه فاصله دو صفحه خازن کمتر باشد، خازن پذیرای بارهای الکتریکی بیشتری خواهد بود. عایقی که بین صفحات خازن قرار دارد نیز می تواند با قطبیت پیدا کردن در ذخیره کردن انرژی نقش داشته باشد. در نتیجه جنس عایق نیز بر روی ظرفیت خازن تاثیر می گذارد. بنابراین ظرفیت خازن از رابطه زیر پیروی می کند:

$$C = K\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

که در رابطه فوق، C بیان کننده ظرفیت خازن (Capacity) بر حسب فاراد است. A نیز مساحت صفحات خازن را بر حسب متر مربع بیان می کند و d فاصله بین صفحات (distance) بر حسب متر است. K ثابت دی الکتریک عایق است. ε_0 گذردهی خلاء است و مقدار آن برابر با 8.85×10^{-12} است.

اتصال خازن به دو سر منبع تغذیه

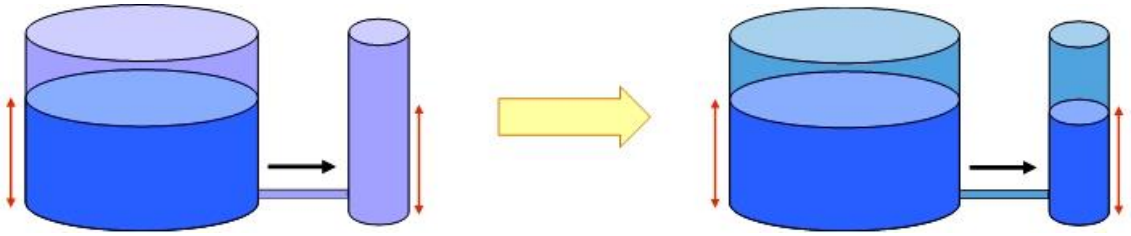


اگر دو سر خازنی را به دو سر باتری متصل کنیم بارهای منفی از سر منفی باتری، بر روی صفحه ای از خازن که به آن متصل است پخش می شوند تا بتوانند از هم فاصله بگیرند. بارهای مثبت نیز بر روی صفحه دیگر پخش می شوند. تعداد بارهایی که بر روی خازن خواهند نشست برابر است با:

$$q = CV$$

که در رابطه فوق C ظرفیت خازن بر حسب فاراد (Farad) و V ولتاژ دو سر خازن بر حسب ولت (Volt) است و q مقدار بار نشسته بر روی خازن بر حسب کولن (Coulomb) است. هر کولن تقریبا معادل بار الکتریکی ٦×١٠^{١٨} الکترون است.

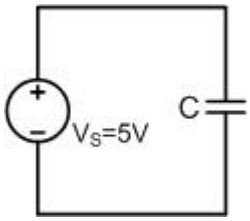
برای اینکه رابطه فوق ملموس تر شود، شکل زیر را ببینید.



شکل ۸-۴: هم سطح شدن آب در ظروف به هم متصل

اگر یک بشکه آب را از طریق لوله ای به استوانه ای متصل کنیم، ارتفاع آب در استوانه و بشکه یکسان می شود. اما بسته به اینکه سطح مقطع استوانه، چه اندازه ای داشته باشد (ظرفیت خازن)، تعداد قطرات آب (بارهای الکتریکی) بیشتری درون استوانه قرار خواهد گرفت. زمانی که خازنی را به باتری ای متصل می کنیم نیز همین گونه است. خازن و باتری به ولتاژ یکسانی می رسند. زمانی که خازنی را به یک باتری و یا یک منبع تغذیه متصل کنیم، مقدار بار موجود در باتری، در مقایسه با باری که درون خازن ذخیره می شود، بسیار بزرگ است و بنابراین ولتاژ خازن در نهایت برابر با ولتاژ دو سر باتری می شود. درست مثل اینکه در ماسه های کنار دریا چاله آبی کنده باشیم که ارتفاع آب درون چاله هم اندازه ارتفاع آب دریا می شود، بدون اینکه از ارتفاع آب دریا کم شود. مثال ۸-۱ را ببینید.

مثال ۸-۱



دو سر یک خازن ۱ میکروفارادی را به یک باتری ۵ ولت متصل می کنیم.
الف. مقدار باری که در خازن ذخیره میشود را بر حسب کولن محاسبه کنید.
ب. تقریبا چند الکترون آزاد بر روی صفحه منفی این خازن ذخیره شده اند؟

پاسخ:

الف. با توجه به اینکه دو سر خازن به دو سر یک منبع تغذیه متصل شده است، ولتاژ دو سر خازن برابر با دو سر باتری می شود. پس بار ذخیره شده در خازن را به صورت زیر حساب می کنیم:

$q=CV \rightarrow q = 1\mu \times 5 = 5\ \mu C$

ب. با توجه به اینکه هر کولن تقریبا معادل 6×10^{18} است، بنابراین تعداد الکترونهای آزادی که بر روی این خازن ذخیره شده اند برابر است با:

$5\times10^{-6} \times 6\times10^{18} = 30\times10^{12}$

بنابراین تقریبا ۳۰ تریلیون (یعنی ۳۰ هزار میلیارد) الکترون آزاد بر روی صفحه منفی خازن ذخیره شده اند.

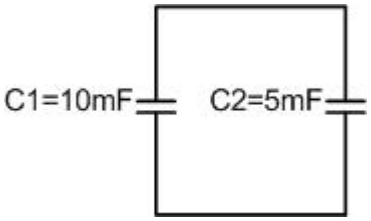
در اینجا خوبست که اصطلاحات میلی، میکرو و نانو و پیکو را یادآوری کنیم. در جدول زیر مقدار هر یک از این مقیاسها ذکر می شود.

واحد	سمبل	مقدار
میلی	m	10^{-3}
میکرو	μ	10^{-6}
نانو	n	10^{-9}
پیکو	p	10^{-12}

جدول ۸-۱: برخی از مقیاسهای رایج

اگر دو سر خازنی را به دو سر خازن دیگری متصل کنیم انتقال یافتن بارهای ذخیره شده در یک خازن به درون خازن دیگر، سبب می شود که ولتاژ در یک خازن کاهش یابد و در خازن دیگر افزایش یابد. درست مثل اینکه دو استوانه را به هم با لوله متصل کرده باشیم. موقعی که آب که از استوانه ای به استوانه دیگر برود، ارتفاع آب در استوانه ای کاهش می یابد و در استوانه دیگر افزایش می یابد. مثال زیر را ببینید.

مثال ۸-۲



دو سر یک خازن ۱۰ میلی فارادی که ولتاژ دو سر آن ۱۲ ولت است را به خازنی ۵ میلی فرادی که کاملا دشارژ است (ولتاژ دو سر آن صفر ولت است) متصل می کنیم. مشخص کنید که ولتاژ دو سر خازنها، چقدر می شود.

پاسخ:

قبل از اینکه خازنها را به هم متصل کنیم، باری که در هریک از خازنها قرار دارد به صورت زیر است:

در خازن یک که ولتاژ ۱۲ ولت و ظرفیت ۱۰ میلی فاراد است:

$Q_1 = C_1V_1 = 10\times10^{-3}\times12 = 0.12$

در خازن دوم، ولتاژ دو سر آن صفر ولت است. پس

$Q_2 = C_2V_2 = 5\times10^{-3} \times 0 = 0$

هنگامی که این دو خازن را به هم متصل میکنیم، قسمتی از بارهای الکتریکی موجود در خازن یک، به درون خازن ۲ میرود. می بایست مجموع بار الکتریکی، پس از اتصال خازنها، با مجموع بارهای الکتریکی در قبل از اتصال برابر باشد. بنابراین اگر بارهای خازنها، پس از اتصال را با q1 و q2 نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2 \rightarrow q_1 + q_2 = 0.12 + 0 = 0.12 \rightarrow q_1 = 0.12 - q_2$

از طرف دیگر، با توجه به اینکه دو سر خازنها را به هم متصل کرده ایم، بنابراین ولتاژ دو سر خازنها می بایست با هم برابر شود:

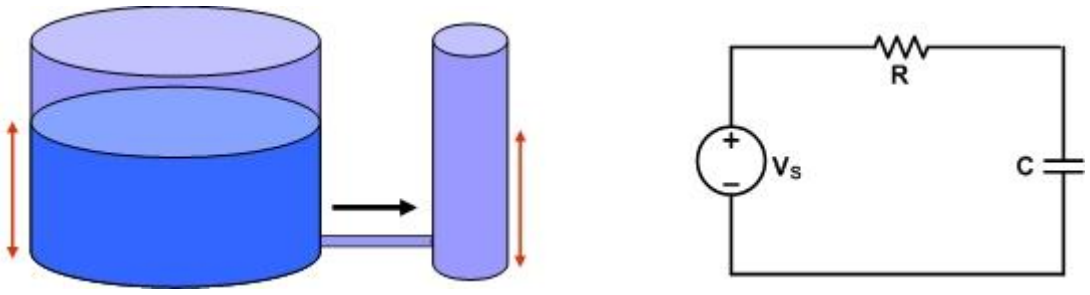
$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow \frac{0.12-q_2}{10\times10^{-3}} = \frac{q_2}{5\times10^{-3}} \Rightarrow 10q_2 = 0.6 - 5q_2 \Rightarrow 15q_2 = 0.6 \Rightarrow q_2 = \frac{0.6}{15} = 0.04$

بنابراین بار ذخیره شده در خازن دو، برابر 0.04 کولن است. پس ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{0.04}{5\times10^{-3}} = 8V$

مدت شارژ و دشارژ شدن خازن

در مثال مخزن و استوانه، هر چه لوله ای که بین مخزن و استوانه قرار دارد قطورتر باشد، آب مدت زمان کمتری طول می کشد که از درون مخزن به درون استوانه برود و ارتفاع آب درون مخزن و استوانه یکسان شود. اگر مقاومت سیمی که بین منبع ولتاژ و خازن قرار دارد نیز هر چه کمتر باشد، خازن سریعتر شارژ می شود. اگر سیم ایده آل باشد (مقاومتش صفر باشد) بلافاصله خازن شارژ می شود، اما اگر بین خازن و منبع ولتاژ مقاومتی وجود داشته باشد مدتی طول می کشد تا خازن شارژ شود.



شکل ۸-۵: بشکه و ظرف آب در مقایسه با منبع تغذیه و خازن

عامل دیگری که در زمان شارژ شدن خازن تاثیر می گذارد ظرفیت خازن است. در مثال بشکه و استوانه، هر چه سطح مقطع استوانه بزرگتر باشد، مدت بیشتری طول می کشد که استوانه از آب پر شود و ارتفاع سطح آب در استوانه و بشکه یکسان شود. ظرفیت خازن نیز هر چه بیشتر باشد، بیشتر طول می کشد تا شارژ شود.

در عمل عاملی که در زمان شارژ شدن خازن نقش دارد، حاصل ضرب ظرفیت خازن و مقاومت است و با τ نمایش داده می شود:

$$\tau = RC$$

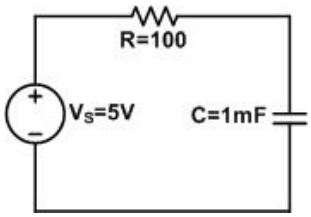
به دست آوردن ولتاژ دو سر خازن در زمانهای مختلف

بنابراین با استفاده از رابطه زیر، می توانیم ولتاژ دو سر خازن را در مدار شکل ۸-٤ در زمانهای مختلف به دست آوریم:

$$V_C(t) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}}$$

در رابطه فوق، V_{init}، ولتاژ دو سر خازن در لحظه صفر، است و V_{final} ولتاژ دو سر منبع ولتاژ است. t بر حسب ثانیه است و بیانگر مدت زمانی است که خازن به ولتاژ V_{final} متصل شده است. مثالهای زیر را ببینید.

مثال ۸-۳



در مدار زیر خازن در آغاز کاملا دشارژ است. ولتاژ خازن را در 0.1 ثانیه و 0.2 ثانیه و 0.3 ثانیه و 0.4 ثانیه محاسبه کنید و نمودار تقریبی ولتاژ خازن را در بازه زمانی 0 تا 0.5 ثانیه ترسیم کنید.

پاسخ:

$$\tau = RC = 100 \times 1m = 0.1$$

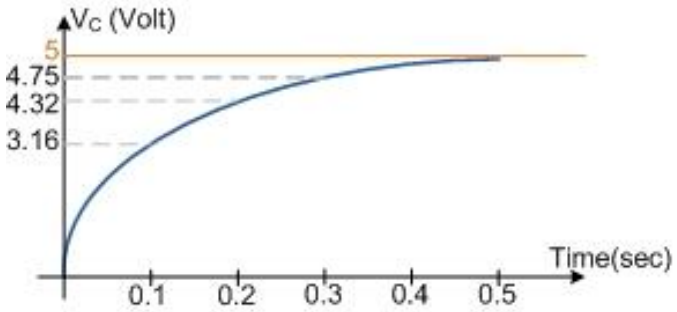
$$V_C(t) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}} \Rightarrow V_C(0.1) = 5 - (5-0)e^{\frac{-0.1}{0.1}} = 5 - 5e^{-1} = 5 - \frac{5}{e} = 3.16V$$

$$V_C(0.2) = 5 - (5-0)e^{\frac{-0.2}{0.1}} \rightarrow V_C(0.2) = 5 - 5e^{-2} = 5 - \frac{5}{e^2} = 4.32V$$

$$V_C(0.3) = 5 - (5-0)e^{\frac{-0.3}{0.1}} \rightarrow V_C(0.3) = 5 - 5e^{-3} = 5 - \frac{5}{e^3} = 4.75V$$

$$V_C(0.4) = 5 - (5-0)e^{\frac{-0.4}{0.1}} \rightarrow V_C(0.4) = 5 - 5e^{-4} = 5 - \frac{5}{e^4} = 4.91V$$

$$V_C(0.5) = 5 - (5-0)e^{\frac{-0.5}{0.1}} \rightarrow V_C(0.5) = 5 - 5e^{-5} = 5 - \frac{5}{e^5} = 4.97V$$

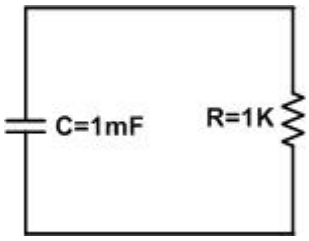


مثال ۸-۴

در مدار زیر، اگر ولتاژ خازن در لحظه صفر، برابر با ۵ ولت باشد،

الف. ولتاژ دو سر خازن را در ۱ ثانیه و ۲ ثانیه و ۳ ثانیه و ۴ ثانیه و ۵ ثانیه به دست آورید.

ب. نمودار ولتاژ خازن را در بازه ۰ تا ۵ ثانیه ترسیم کنید.



پاسخ:

الف) $\tau = RC = 1000 \times 1m = 1\ second$

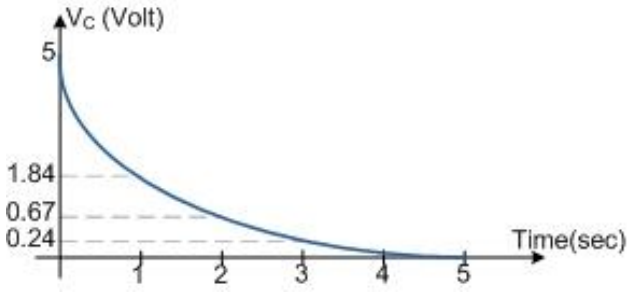
$$V_C(t) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}} \Rightarrow V_C(1) = 0 - (0-5)e^{\frac{-1}{1}} = 5e^{-1} = \frac{5}{e} \approx 1.839V$$

$$V_C(2) = 0 - (0-5)e^{\frac{-2}{1}} = 5e^{-2} = \frac{5}{e^2} \approx 0.677V$$

$$V_C(3) = 0 - (0-5)e^{\frac{-3}{1}} = 5e^{-3} = \frac{5}{e^3} \approx 0.249V$$

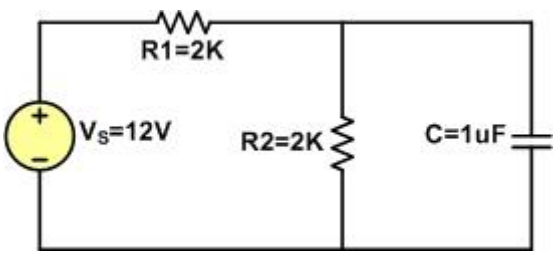
$$V_C(4) = 0 - (0-5)e^{\frac{-4}{1}} = 5e^{-4} = \frac{5}{e^4} \approx 0.091V$$

$$V_C(5) = 0 - (0-5)e^{\frac{-5}{1}} = 5e^{-5} = \frac{5}{e^5} \approx 0.034V$$



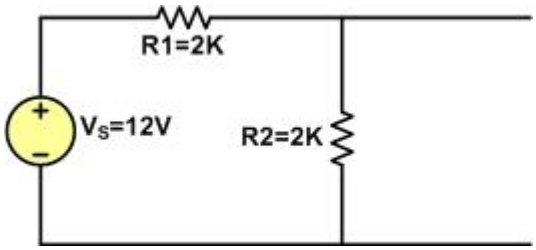
مثال ۸-۵

در مدار زیر اگر در لحظه صفر، ولتاژ دو سر خازن ۱ ولت باشد،
الف. پس از ۲ میلی ثانیه ولتاژ دو سر خازن چقدر است؟
ب. پس از ۲ میلی ثانیه جریان گذرا از مقاومت R2 چقدر است؟



پاسخ:

برای اینکه بتوانیم از معادله شارژ و دشارژ شدن خازن استفاده کنیم، لازم است که مدار را به صورت مدار شکل ۸-۵ تبدیل کنیم تا بتوانیم مقدار مقاومت و ولتاژ را در معادله قرار دهیم. برای اینکه مدار به شکل مدار ۸-۵ تبدیل شود، کافی است که از کل مدار از دید دو سر خازن، معادل تونن بگیریم تا کل مدار تبدیل به یک منبع سری شده با مقاومت تبدیل شود. برای اینکه معادل تونن بگیریم، خازن را از مدار حذف می کنیم.



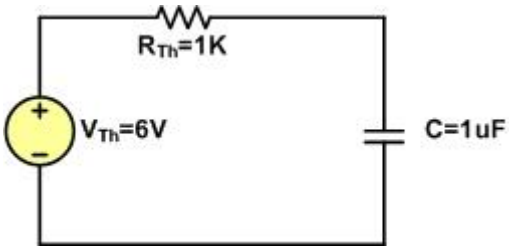
ولتاژ دو سر R2، مقدار ولتاژ تونن را می دهد:

$V_{Th} = V_{R2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times V_S = \frac{2K}{4K} \times 12 = 6V$

برای به دست آوردن R_{Th} منبع ولتاژ را خاموش می کنیم و مقاومت را از دید دو سر خروجی اندازه می گیریم:

$R_{Th} = R1||R2 = \frac{R_1 \times R_2}{R_1+R_2} = \frac{4M}{4K} = 1K$

بنابراین مدار به شکل زیر می شود:



حال معادله شارژ خازن را برای شکل فوق می نویسیم تا ولتاژ دو سر خازن را پس از ۲ میلی ثانیه به دست آوریم:

$$\tau = RC = 1K \times 1\mu = 1ms$$

$V_C(2) = 6 - (6-1)e^{\frac{-2}{1}}$ ➔ $V_C(0.2) = 6 - 5e^{-2} = 6 - \frac{5}{e^2} = 5.32V$

ب. با توجه به اینکه در این مدار مقاومت R2 با خازن موازی هستند، بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت R2 نیز 5.32V است و به سهولت می توانیم جریان گذرا از R2 را به صورت زیر حساب کنیم:

$I_{R2} = V_{R2}/R_2 = 5.32 / 2K = 2.66mA$

جریان گذرا از خازن

هنگامی که بارهای منفی بر روی یکی از صفحات خازن قرار بگیرند، باعث می شوند که بارهای منفی از صفحه دیگر به عقب رانده شوند. بنابراین در مدتی که خازن در حال شارژ یا دشارژ شدن است جریانی را از خود عبور می دهد. می دانیم که $i = \frac{dq}{dt}$ و از طرفی می دانیم که $q = CV$. بنابراین جریان گذرا از خازن در زمان شارژ و دشارژ شدن به قرار زیر است:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV)}{dt}$$

با توجه به اینکه ظرفیت خازن (C) عدد ثابت است و نسبت به زمان تغییر نمی کند بنابراین می توانیم آن را از داخل مشتق بیرون بیاوریم:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{CdV}{dt}$$

از طرفی می دانیم که در مدار RC، ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

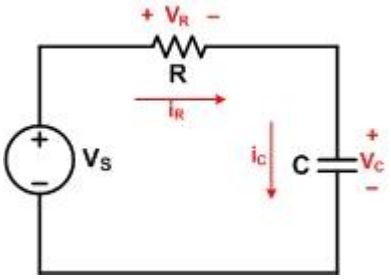
$$V_C(t) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}}$$

بنابراین برای اینکه جریان را به دست آوریم از معادله ولتاژ نسبت به زمان مشتق می گیریم. در معادله ولتاژ خازن، V_{init} و V_{final} و مقادیر R و C نسبت به زمان ثابت هستند. پس معادله جریان به صورت زیر می شود:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{CdV}{dt} = \frac{C(V_{final} - V_{init})}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{C(V_{final} - V_{init})}{RC}e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{(V_{final} - V_{init})}{R}e^{\frac{-t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$i_C(t) = \frac{(V_{final} - V_{init})}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

البته برای محاسبه کردن جریان خازن می توانیم به جای مشتق گرفتن از راه دیگری نیز عمل کنیم؛ در این مدار با توجه به اینکه خازن و مقاومت با هم سری هستند، می توانیم به جای جریان خازن جریان مقاومت را حساب کنیم. برای به دست آوردن جریان گذرا از مقاومت نیز می توانیم به سهولت از قوانین مدار استفاده کنیم. یعنی ابتدا با استفاده از KVL ولتاژ دو سر مقاومت را حساب کنیم و سپس از روی ولتاژ مقاومت، جریان آن را محاسبه نماییم:



$$V_S - V_R - V_C = 0 \Rightarrow V_R = V_S - V_C$$

$$\Rightarrow i_R = \frac{V_S - V_C}{R} = \frac{V_S - (V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}})}{R}$$

از طرفی میدانیم که V_{final} و V_S یکی هستند. پس داریم:

$$i_R = \frac{V_{final} - V_{final} + (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}}}{R} = \frac{(V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}}}{R} \Rightarrow i_C = \frac{(V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}}}{R}$$

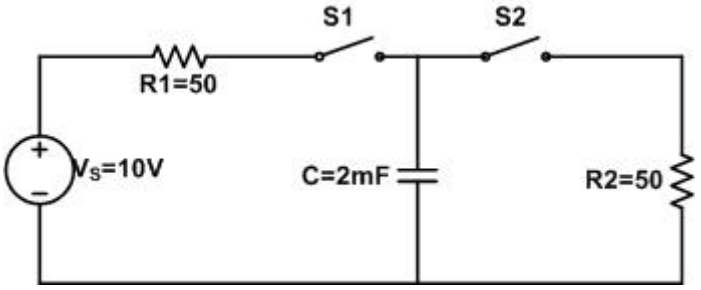
مثال ۸-۶

در مدار زیر، خازن در لحظه صفر کاملا دشارژ است. در لحظه صفر، کلید S1 را می بندیم و کلید S2 را باز می کنیم. سپس پس از 0.3 ثانیه کلید S1 را باز می کنیم و کلید S2 را می بندیم.

الف. ولتاژ دو سر خازن را در 0.1 ثانیه و 0.2 ثانیه و 0.3 ثانیه و 0.4 ثانیه و 0.5 ثانیه و 0.6 ثانیه به دست آورید.

ب. جریان گذرا از خازن را در 0.1 ثانیه و 0.2 ثانیه و 0.3 ثانیه و 0.4 ثانیه و 0.5 ثانیه و 0.6 ثانیه به دست آورید.

ج. نمودار ولتاژ و جریان خازن را بر حسب زمان در بازه ۰ تا 0.6 ثانیه رسم کنید.



پاسخ:

الف. در بازه زمانی ۰ تا 0.3 ثانیه که کلید S1 بسته است و S2 باز است، مقاومت R1 با خازن سری می شود که در این حالت:

$$\tau = R_1 C = 50 \times 2m = 100ms = 0.1s$$

$$V_C(t) = V_{final} - \left(V_{final} - V_{init}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} \Rightarrow V_C(t) = V_S - (V_S - 0)e^{\frac{-t}{0.1}} = 10 - 10e^{\frac{-t}{0.1}}$$

$$V_C(0.1) = 10 - 10e^{\frac{-0.1}{0.1}} = 10 - 10e^{-1} = 10 - 3.7 = 6.3$$

$$V_C(0.2) = 10 - 10e^{\frac{-0.2}{0.1}} = 10 - 10e^{-2} = 10 - 1.35 = 8.6$$

$$V_C(0.3) = 10 - 10e^{\frac{-0.3}{0.1}} = 10 - 10e^{-3} = 10 - 0.5 = 9.5$$

در بازه زمانی 0.3 تا 0.6 ثانیه که کلید S1 باز است و S2 بسته است، مقاومت R2 با خازن سری می شود که در این حالت:

$$\tau = R_2 C = 50 \times 2m = 100ms = 0.1s$$

ولتاژ خازن در آغاز این بازه زمانی (در لحظه 0.3 ثانیه) برابر با 9.5V است. پس V_{init} را در معادلات 9.5V وارد می کنیم. با توجه به اینکه در این حالت، منبع ولتاژی در مدار وجود ندارد، بنابراین V_{final} برابر با صفر خواهد بود. همچنین زمان را نیز می بایست بر حسب مدتی که از آغاز این بازه (زمان 0.3 ثانیه) گذشته است، در معادله وارد کنیم. پس داریم:

$$V_C(t) = V_{final} - \left(V_{final} - V_{init}\right)e^{\frac{-(t-0.3)}{\tau}} \Rightarrow V_C(t) = 0 - (0 - 9.5)e^{\frac{-(t-0.3)}{0.1}}$$

$$V_C(0.4) = 0 - (0 - 9.5)e^{\frac{-(0.4-0.3)}{0.1}} = 9.5e^{\frac{-0.1}{0.1}} = 9.5e^{-1} = 3.5V$$

$$V_C(0.5) = 0 - (0 - 9.5)e^{\frac{-(0.5-0.3)}{0.1}} = 9.5e^{\frac{-0.2}{0.1}} = 9.5e^{-2} = 1.28V$$

$$V_C(0.6) = 0 - (0 - 9.5)e^{\frac{-(0.6-0.3)}{0.1}} = 9.5e^{\frac{-0.3}{0.1}} = 9.5e^{-3} = 0.47V$$

ب. برای به دست آوردن جریان از معادله مربوطه استفاده می کنیم:

$$i_C(0) = \frac{\left(V_{final} - V_{init}\right)}{R}e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{(10 - 0)}{R_1}e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{10}{50}e^{\frac{0}{0.1}} = 0.2A = 200mA$$

$$i_C(0.1) = \frac{(10 - 0)}{R_1}e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{10}{50}e^{\frac{-0.1}{0.1}} = \frac{e^{-1}}{5} = 0.074A = 74mA$$

$$i_C(0.2) = \frac{10}{50}e^{\frac{-0.1}{0.1}} = \frac{e^{-2}}{5} = 0.027A = 27mA$$

$$i_C(0.3) = \frac{10}{50}e^{\frac{-0.3}{0.1}} = \frac{e^{-3}}{5} = 0.010A = 10mA$$

در 0.3 ثانیه کلید S1 باز می شود و S2 بسته می شود. بنابراین در 0.3^+ داریم:

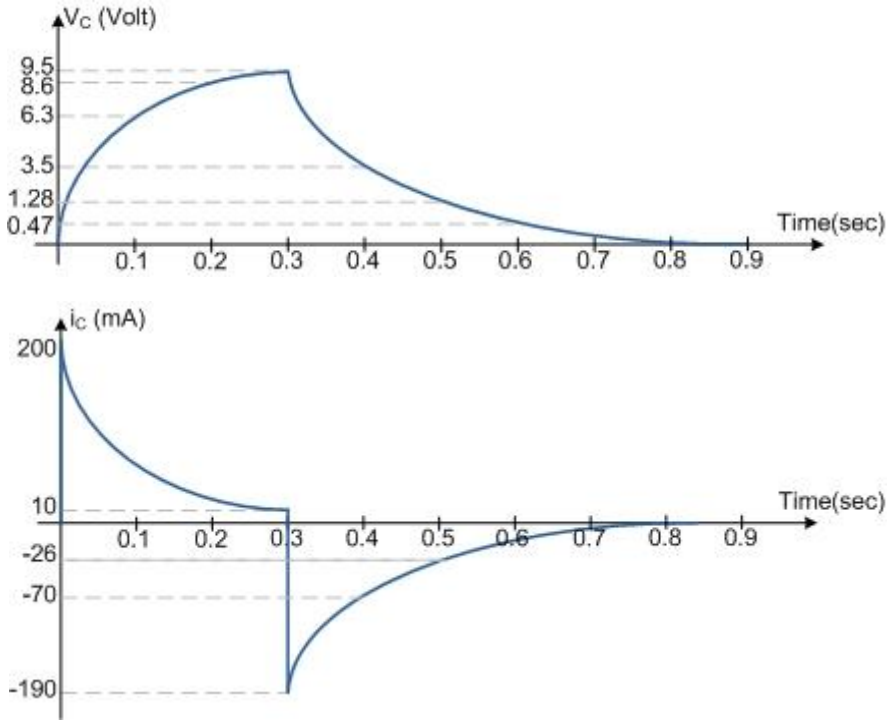
$$i_C(0.3+) = \frac{\left(V_{final} - V_{init}\right)}{R}e^{\frac{-(t-0.3)}{\tau}} = \frac{(0 - 9.5)}{R_2}e^{\frac{-(t-0.3)}{0.1}} = \frac{-9.5}{50}e^{\frac{0}{0.1}} = -0.190A = -190mA$$

$$i_C(0.4) = \frac{(0 - 9.5)}{R_2}e^{\frac{-(0.4-0.3)}{0.1}} = \frac{-9.5}{50}e^{-1} = -0.070A = -70mA$$

$$i_C(0.5) = \frac{(0 - 9.5)}{R_2}e^{\frac{-(0.5-0.3)}{0.1}} = \frac{-9.5}{50}e^{-2} = -0.026A = -26mA$$

$$i_C(0.6) = \frac{(0 - 9.5)}{R_2}e^{\frac{-(0.6-0.3)}{0.1}} = \frac{-9.5}{50}e^{-3} = -0.009A = -9mA$$

ج.



همان طوری که در شکل فوق می بینید جریان در خازن بیان کننده نرخ تغییر ولتاژ است. به عبارت دیگر، متناسب با شیب منحنی ولتاژ است. هر کجا شیب منحنی ولتاژ زیاد است جریان نیز زیاد است. در نقاطی که منحنی ولتاژ صعودی است، جریان مثبت است و در نقاطی که منحنی ولتاژ نزولی است (خازن در حال دشارژ شدن است) جریان منفی است.

تحلیل مدارهایی با بیش از یک خازن

هنگامی که در مداری بیش از یک خازن وجود داشته باشد، در صورتی که خازنها با هم سری و یا موازی باشند میتوانیم خازن ها را با هم ساده کنیم و سپس به تحلیل مدار بپردازیم. اما در مواردی که خازنها قابل ساده کردن نباشند لازم است که معادلات دیفرانسیل را برای مدار بنویسیم و آنها را حل کنیم تا بتوانیم مدار را تحلیل کنیم. تحلیل مدارها با استفاده از معادلات دیفرانسیل در دامنه درسی ما نیست و علاقه مندان می توانند فیلمهای دکتر آگاروال در دانشگاه MIT را ملاحظه کنند.

هنگامی که چندین خازن با هم موازی باشند، ظرفیت خازنی معادل آنها برابر است با:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$$

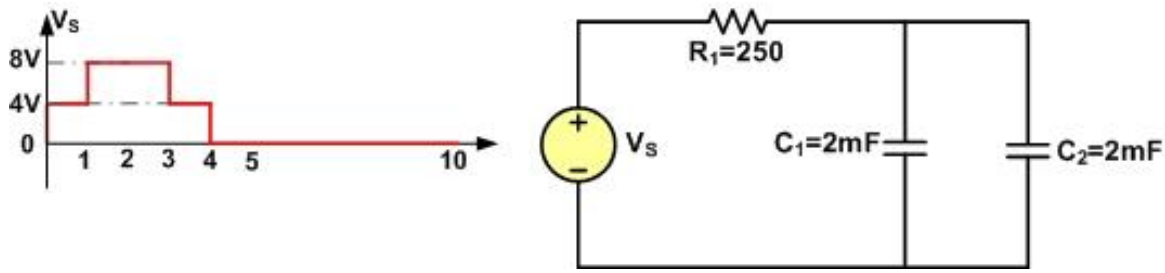
هنگامی که چندین خازن با هم سری باشند، ظرفیت خازنی معادل آنها برابر است با:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

به طور نمونه مثال زیر را ببینید.

مثال ۸-۷

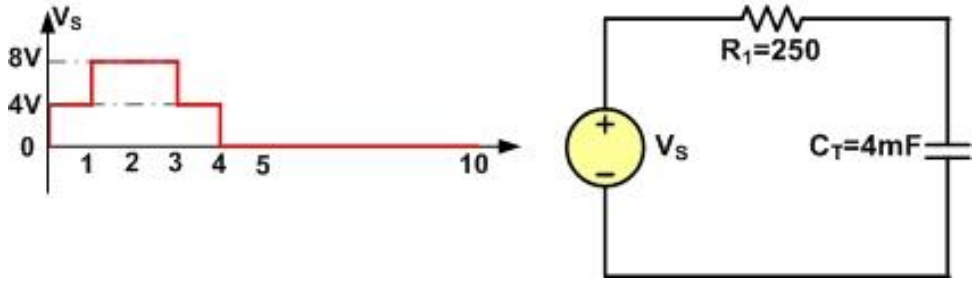
در مدار زیر ولتاژ دو سر خازنهای C1 و C2 را در لحظه های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ثانیه به دست آورید. خازنها را در لحظه صفر، دشارژ فرض کنید.



پاسخ:

با توجه به اینکه C_1 و C_2 با هم موازی هستند، ولتاژ دو سر آنها با هم یکسان است و با هم تغییر می کند. بنابراین خازن معادلشان را جایگزین می کنیم و ولتاژ دو سرشان را بررسی می کنیم.

$$C_T = C_1 + C_2 = 2m + 2m = 4mF$$



مقدار T برابر است با:

$$\tau = RC = 250 \times 4m = 1000m = 1\ second$$

در بازه ۰ تا ۱ ثانیه، ولتاژ منبع ۴ ولت است و در ابتدای بازه خازنها دشارژ هستند. بنابراین در لحظه ۱ ثانیه ولتاژ خازن برابر است با:

$$V_C(1) = V_{final} - \left(V_{final} - V_{init}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} = 4 - (4-0)e^{\frac{-1}{1}} = 4 - 4e^{-1} = 2.53$$

در بازه ۱ تا ۲ ثانیه، ولتاژ منبع ۸ ولت است. بنابراین در لحظه ۲ ثانیه ولتاژ خازن برابر است با:

$$V_C(2) = V_{final} - \left(V_{final} - V_{init}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} = 8 - (8-2.53)e^{\frac{-1}{1}} = 8 - 5.47e^{-1} = 5.987$$

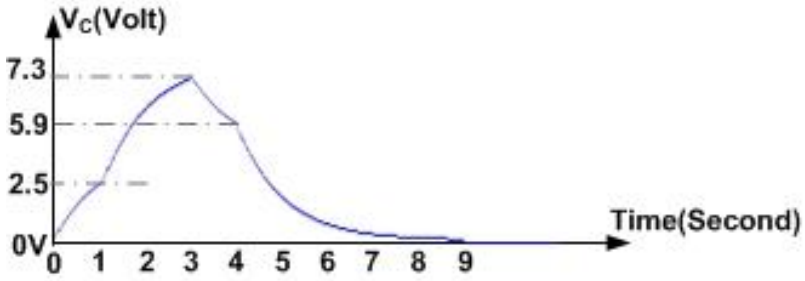
در لحظه ۳ ثانیه، مدت ۲ ثانیه از ابتدای بازه میگذرد و در ابتدای این بازه ولتاژ خازن ۲,۵۳ است پس ولتاژ خازن در ۳ ثانیه برابر است با:

$$V_C(3) = V_{final} - \left(V_{final} - V_{init}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} = 8 - (8-2.53)e^{\frac{-2}{1}} = 8 - 5.47e^{-2} = 7.259$$

در بازه ۳ تا ۴ ثانیه، ولتاژ منبع بر روی ۴ ولت ثابت است و در ابتدای این بازه ولتاژ 7.259 ولت است. بنابراین در لحظه ۴ ثانیه که ۱ ثانیه از ابتدای این بازه می گذرد، ولتاژ خازن برابر است با:

$$V_C(4) = V_{final} - \left(V_{final} - V_{init}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} = 4 - (4-7.259)e^{\frac{-1}{1}} = 4 + 3.259e^{-1} = 5.2$$

نمودار ولتاژ خازن نسبت به زمان به صورت زیر می شود:



بخش ۸-۲: تحلیل سریع مدارهای RC

تاکنون آموختید که هنگامی که خازنی به یک منبع تغذیه متصل می شود، ولتاژ دو سر خازن از مقدار اولیه، به سمت ولتاژ منبع تغذیه تغییر می کند. اگر مقاومتی بین منبع تغذیه و خازن نباشد، خازن بلافاصله شارژ می شود و به ولتاژ منبع تغذیه می رسد و اگر مقاومتی بین خازن و منبع تغذیه باشد، ولتاژ دو سر خازن به تدریج تغییر می کند تا به ولتاژ منبع تغذیه برسد.

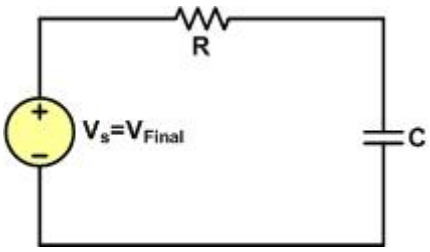
در معادله ولتاژ خازن (شکل زیر) قسمت V_{final} ولتاژ نهایی دو سر خازن را بیان می کند و قسمت $(V_{final}-V_{init})e^{-t/T}$، مقدار فاصله ای که خازن تا ولتاژ نهایی دارد را نشان میدهد.

$$V_C(t) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}}$$

مدت زمانی که طول می کشد تا خازن شارژ شود به مقدار τ بستگی دارد. همان طوری که در مثال زیر خواهید دید، خازن پس از گذشت 5τ تقریبا به ولتاژ منبع تغذیه می رسد.

مثال ۸-۸

در مدار زیر، اگر ولتاژ خازن در لحظه صفر برابر با V_{init} باشد و ولتاژ منبع V_{final} باشد:
الف. ولتاژ خازن را در لحظات τ و 2τ و 3τ و 4τ و 5τ حساب کنید.
ب. نمودار ولتاژ دو سر خازن را رسم کنید.



پاسخ:

$$V_C(\tau) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-\tau}{\tau}} = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{-1}$$
$$= V_{final} - 0.367(V_{final} - V_{init}) \Rightarrow V_C(\tau) = 0.633V_{final} - 0.367V_{init}$$

$$V_C(2\tau) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-2\tau}{\tau}} = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{-2}$$
$$= V_{final} - 0.135(V_{final} - V_{init}) \Rightarrow V_C(2\tau) = 0.865V_{final} - 0.135V_{init}$$

$$V_C(3\tau) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-3\tau}{\tau}} = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{-3}$$
$$= V_{final} - 0.049(V_{final} - V_{init}) \Rightarrow V_C(3\tau) = 0.951V_{final} - 0.049V_{init}$$

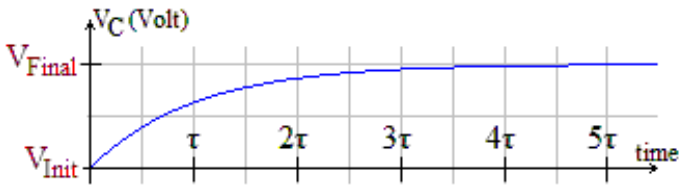
$$V_C(4\tau) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-4\tau}{\tau}} = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{-4}$$
$$= V_{final} - 0.018(V_{final} - V_{init}) \Rightarrow V_C(4\tau) = 0.982V_{final} - 0.049V_{init}$$

$$V_C(5\tau) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-5\tau}{\tau}} = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{-5}$$
$$= V_{final} - 0.006(V_{final} - V_{init}) \Rightarrow V_C(5\tau) = 0.994V_{final} - 0.006V_{init}$$

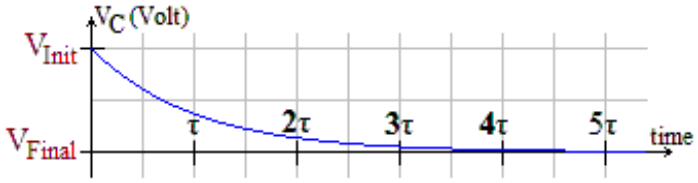
همانطوری که می بینید، در مدار RC، پس از 5τ، ولتاژ خازن به اندازه 0.994 (یعنی 99.4%) به مقدار نهایی نزدیک شده است. بنابراین می توانیم بگوییم که با گذشت 5τ، ولتاژ خازن تقریبا به ولتاژ نهایی می رسد.

ب. حال با استفاده از جوابهایی که در قسمت الف به دست آورده ایم، نمودار ولتاژ خازن را رسم می کنیم.

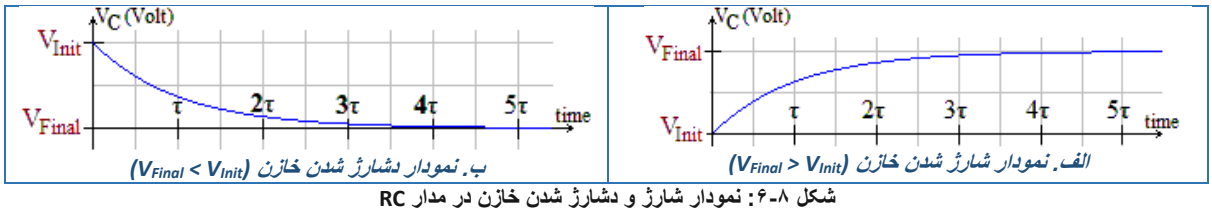
اگر مقدار V_{final} بیشتر از V_{init} باشد نمودار به شکل زیر می شود:



اگر مقدار V_{final} کمتر از V_{init} باشد نمودار به شکل زیر می شود:



همان طوری که در مثال فوق دیدید، در مدار RC (منظور از مدار RC مداری است که دو سر یک خازن، از طریق یک مقاومت به یک منبع تغذیه متصل باشد)، ولتاژ دو سر خازن، به صورت شکل زیر تغییر میکند. اگر ولتاژ اولیه خازن از ولتاژ منبع ولتاژ کمتر باشد، شکل ولتاژ خازن به صورت شکل الف و در غیر این صورت به صورت شکل ب خواهد بود.



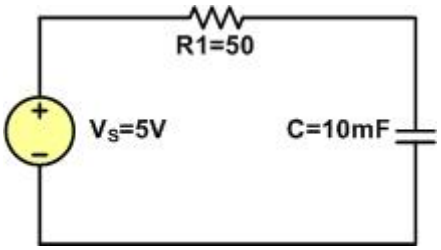
شکل ۸-۶: نمودار شارژ و دشارژ شدن خازن در مدار RC

بنابراین در هر مدار RC کافیست ببینیم که آیا V_{init} بیشتر از V_{final} است یا اینکه کمتر است تا بتوانیم از روی آن شکل نمودار ولتاژ خازن را رسم کنیم.

تنها چیزی که باقی می ماند این است که ببینیم پس از چه مدت ولتاژ دو سر خازن به ولتاژ نهایی می رسد. برای به دست آوردن مدت زمان شارژ شدن خازن نیز، کافی است که بر حسب R و C موجود در مدار مقدار τ را به دست آوریم. خازن پس از 5τ به ولتاژ منبع تغذیه می رسد. مثال زیر را ببینید.

مثال ۸-۹

خازنی با ظرفیت 10mF از طریق یک مقاومت ۵۰ اهمی به یک منبع ولتاژ ۵ ولتی متصل شده است. در لحظه صفر که خازن کاملا دشارژ است، منبع تغذیه روشن می شود.
الف. نمودار شارژ شدن خازن را رسم کنید.
ب. اگر یک دقیقه بعد، منبع تغذیه را خاموش کنیم، نمودار ولتاژ دو سر خازن را برای پس از یک دقیقه رسم کنید.

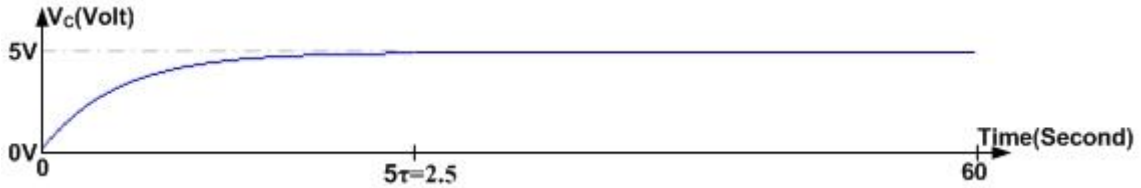


پاسخ:

الف. با توجه به اینکه ولتاژ منبع تغذیه از ولتاژ اولیه خازن بیشتر است بنابراین نمودار ولتاژ دو سر خازن صعودی است. مقدار τ در این مدار برابر است با:

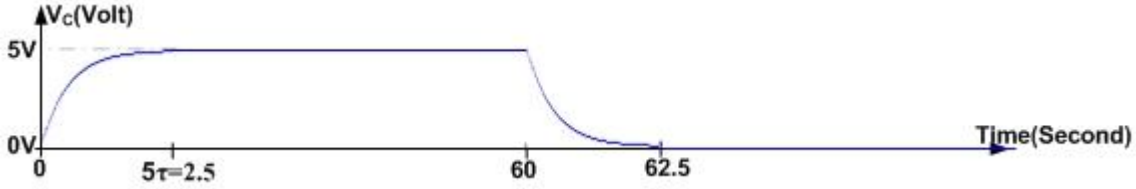
$$\tau = R \times C = 50 \times 10m = 500ms = 0.5s$$

بنابراین 5τ در این مدار برابر است با 2.5=0.5×5. یعنی پس از 2.5 ثانیه ولتاژ دو سر خازن برابر با ولتاژ منبع تغذیه میشود:



ب. با توجه به اینکه پس از ۱ دقیقه، منبع تغذیه خاموش میشود، ولتاژ منبع تغذیه به ۰ ولت تغییر می کند. این در حالی است که همانطوری که در قسمت الف دیدیم در لحظه یک دقیقه، ولتاژ دو سر خازن ۵ ولت است. بنابراین خازن، پس از یک دقیقه (۶۰ ثانیه) شروع به دشارژ شدن می کند. با توجه به اینکه مقدار R و C همانند قسمت الف است، بنابراین مقدار τ نیز 0.5 ثانیه میشود و 5τ همان 2.5 ثانیه است. بنابراین 2.5 ثانیه پس از یک دقیقه خازن (در لحظه 62.5 ثانیه) کاملا دشارژ می شود.

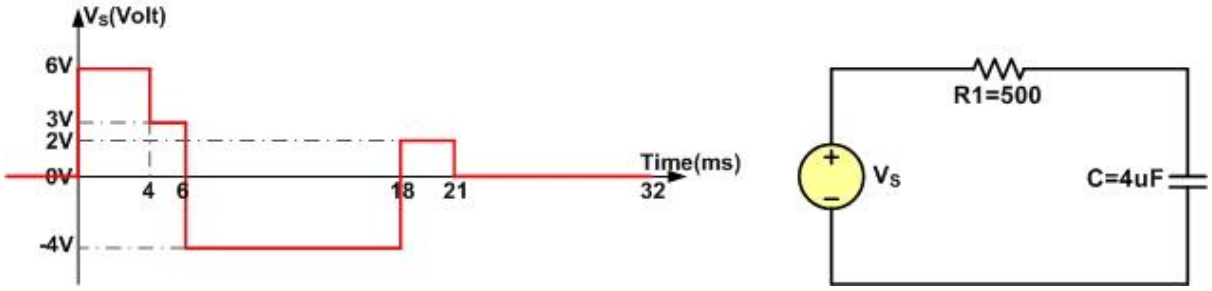
بنابراین اگر بخواهیم نمودار ولتاژ خازن را از ابتدا تا انتها بکشیم به صورت زیر می شود:



در مواردی که کمتر از 5τ به خازن فرصت دهیم که شارژ یا دشارژ شود، ولتاژ دو سر خازن به ولتاژ منبع تغذیه نمی رسد. در این موارد می توانیم با استفاده از معادله ولتاژ خازن، ولتاژ نهایی که خازن به آن می رسد را محاسبه کنیم. مثال زیر را ببینید.

مثال ۸-۱۰

در مدار زیر، منبع تغذیه، ولتاژی به شکل زیر را تولید می کند. نمودار ولتاژ دو سر خازن را رسم کنید. خازن در لحظه صفر، کاملا دشارژ است.



پاسخ:

در این مدار τ برابر است با:

$$\tau = R \times C = 500 \times 4\mu = 2000\mu s = 2ms$$

بنابراین در این مدار 5τ برابر است با:

$$5\tau = 5 \times 2m = 10ms$$

در بازه ۰ تا ۴ میلی ثانیه، ولتاژ منبع تغذیه 6 ولت است و طول مدت این بازه برابر با ۴ میلی ثانیه است. با توجه به اینکه ۴ میلی ثانیه از 5τ کوچکتر است، بنابراین خازن فرصت کافی جهت شارژ کامل شدن را ندارد. مقدار شارژی که خازن می تواند در این مدت دریافت کند برابر است با:

$$V_C(4ms) = 6 - (6-0)e^{\frac{-4}{2}} = 6 - (6)e^{-2} = 6 - 0.135 \times 6 \Rightarrow V_C(4ms) = 6 - 0.81 = 5.19V$$

در بازه ۴ تا ۶ میلی ثانیه، ولتاژ منبع ۳ ولت است و همان طوری که در قسمت قبل دیدیم در ۴میلی ثانیه که ابتدای این بازه است، ولتاژ خازن 5.19 ولت است. طول مدت این بازه 6-4=2ms است که از 5τ کوچکتر است. با استفاده از معادله ولتاژ خازن، ولتاژ دو سر خازن را در انتهای این بازه (در ۶ میلی ثانیه) محاسبه می کنیم:

$$V_C(6ms) = 3 - (3-5.19)e^{\frac{-2}{2}} = 3 + 2.19e^{-1} = 3 + 0.8 \Rightarrow V_C(6ms) = 3.8V$$

در بازه ۶ تا ۱۸ میلی ثانیه، ولتاژ منبع 4- ولت است و ولتاژ خازن در ابتدای این بازه 3.8 ولت می باشد. طول مدت این بازه برابر است با:

$$18 - 6 = 12ms$$

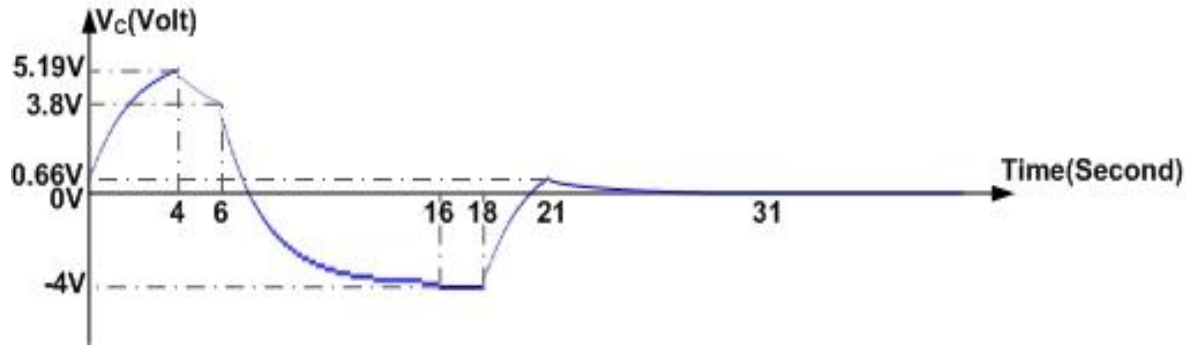
که 12 میلی ثانیه از 5τ بزرگتر است. بنابراین پس از 5τ ولتاژ دو سر خازن به ولتاژ منبع تغذیه که 4- ولت است می رسد.

$$6ms + 5\tau = 6ms + 10ms = 16ms$$

در بازه ۱۸ میلی ثانیه تا ۲۱ میلی ثانیه، ولتاژ منبع ۲ ولت است و در ۱۸ میلی ثانیه ولتاژ خازن برابر با 4- ولت است. طول این بازه برابر با ۳ میلی ثانیه است که از ۱۰ میلی ثانیه کمتر است. بنابراین ولتاژ دو سر خازن در انتهای بازه برابر است با:

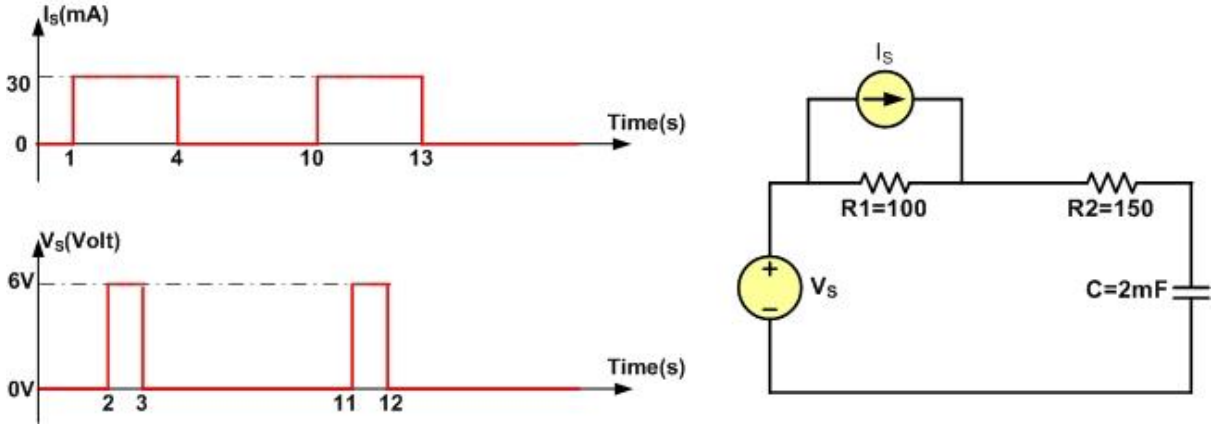
$$V_C(21ms) = 2 - (2+4)e^{\frac{-3}{2}} = 2 - 6e^{-1.5} = 2 - 1.34 \Rightarrow V_C(21ms) = 0.66V$$

در بازه ۲۱ تا ۳۲ میلی ثانیه، ولتاژ منبع 0 ولت است و در ابتدای این بازه ولتاژ خازن 0.66 ولت است. طول بازه ۱۱ میلی ثانیه است که از 5τ بزرگتر است. بنابراین پس از گذشته 5τ خازن به ولتاژ منبع می رسد. یعنی در لحظه ۳۱ میلی ثانیه، ولتاژ خازن 0 ولت می شود.



مثال ۸-۱۱

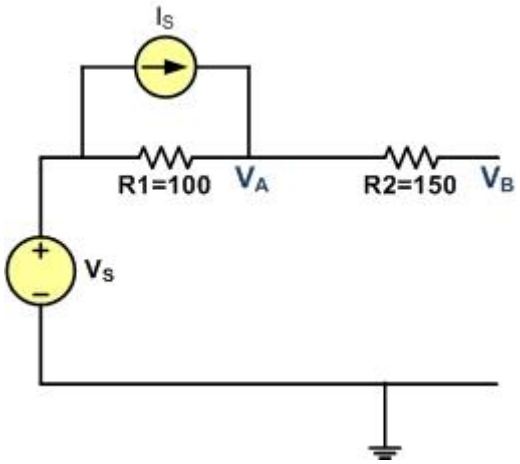
در مدار زیر، نمودار ولتاژ دو سر خازن را نسبت به زمان رسم کنید. خازن در لحظه صفر، دشارژ است.



پاسخ:

ابتدا مدار معادل تونن را برای مدار فوق به دست می آوریم:

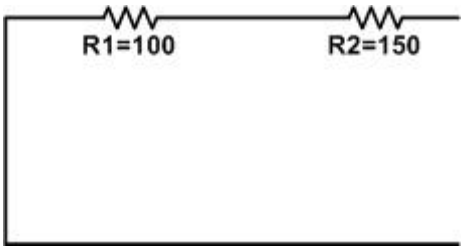
برای به دست آوردن V_{Th}، ولتاژ دو سر خروجی مدار را محاسبه می کنیم. با توجه به اینکه سر مدار باز است از R2 جریانی عبور نمی کند و افت ولتاژ بر روی آن صفر است. پس کافی است که ولتاژ V_A را به دست آوریم. در گره A داریم:



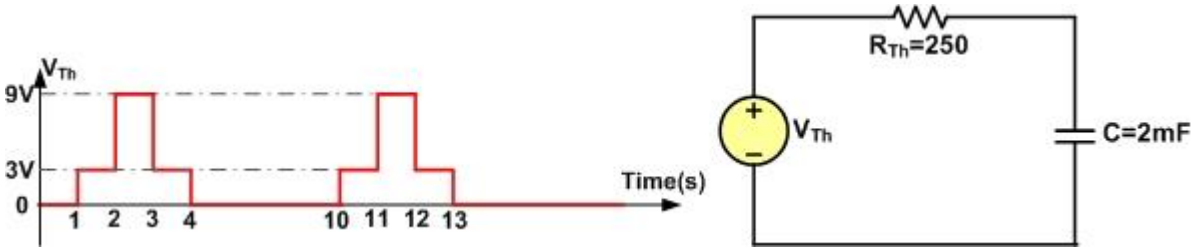
$$I_S + \frac{V_S - V_A}{R_1} = 0 \Rightarrow I_S R_1 + V_S - V_A = 0 \Rightarrow V_A = I_S R_1 + V_S = 100 I_S + V_S \Rightarrow V_{Th} = 100 I_S + V_S$$

برای به دست آوردن R_{Th}، منابع را خاموش می کنیم:

$R_{Th} = R1 + R2 = 250$



بنابراین معادل تونن مدار به صورت زیر است:



در این مدار T برابر است با:

$$\tau = R \times C = 250 \times 2m = 500m = 0.5\ second$$

و 5T برابر است با:

$$5\tau = 5 \times 0.5 = 2.5\ seconds$$

حال می توانیم همانند سوال قبل، این مساله را حل می کنیم.

در بازه زمانی ۰ تا ۱، ولتاژ منبع، صفر ولت است و ولتاژ خازن در ابتدای بازه صفر ولت می باشد. بنابراین با توجه به اینکه ولتاژ خازن و منبع در این بازه یکسان هستند، در طول این بازه ولتاژ دو سر خازن، همان صفر ولت باقی می ماند.

در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه، ولتاژ منبع ۳ ولت و ولتاژ خازن در ابتدای بازه صفر ولت است و چون طول بازه از 5T کوچکتر است، ولتاژ خازن به ولتاژ منبع نمی رسد و ولتاژ خازن در انتهای این بازه را با استفاده از معادله ولتاژ خازن محاسبه می کنیم:

$$V_C(2) = 3 - (3 - 0)e^{\frac{-1}{0.5}} = 3 - 3e^{-2} = 3 - 3 \times 0.135 \Rightarrow V_C(2) = 3 - 0.405 = 2.595V$$

در بازه ۲ تا ۳، ولتاژ منبع ۹ ولت است و ولتاژ خازن در ابتدای بازه 2.595 ولت می باشد. طول بازه ۱ ثانیه است که به اندازه 2T می باشد. بنابراین ولتاژ خازن در انتهای این بازه برابر است با:

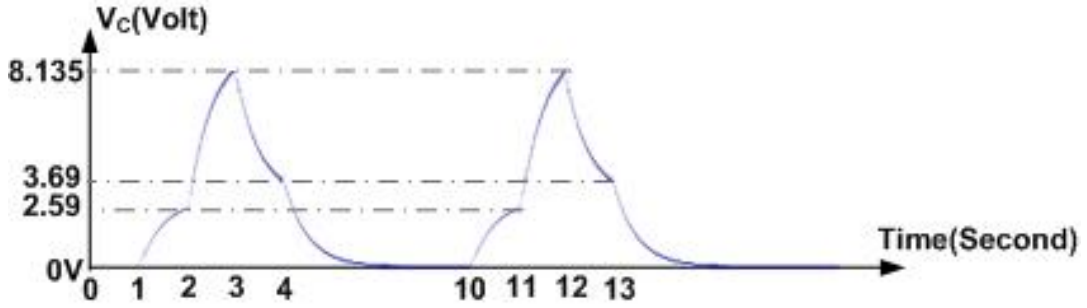
$$V_C(3) = 9 - (9 - 2.595)e^{\frac{-1}{0.5}} = 9 - 6.405e^{-2} = 9 - 6.405 \times 0.135 \Rightarrow V_C(2) = 9 - 0.865 = 8.135V$$

در بازه ۳ تا ۴ ثانیه ولتاژ منبع ۳ ولت و ولتاژ خازن در ابتدای بازه 8.135 می باشد. طول بازه نیز یک ثانیه است. پس ولتاژ خازن در انتهای بازه برابر است با:

$$V_C(4) = 3 - (3 - 8.135)e^{\frac{-1}{0.5}} = 3 - 5.135e^{-2} = 3 + 5.135 \times 0.135 \Rightarrow V_C(4) = 3 + 0.69 = 3.69V$$

در بازه ۴ تا ۱۰ ثانیه، ولتاژ منبع صفر ولت است و ولتاژ خازن در ابتدای بازه 3.69 ولت است. با توجه به اینکه طول این بازه ۶ ثانیه است و از 5T بزرگتر است، ولتاژ دو سر خازن بعد از 2.5 ثانیه به صفر ولت می رسد و تا انتهای بازه همان 0 ولت باقی می ماند.

در بازه ۱۰ تا ۱۱ ثانیه، ولتاژ منبع ۳ ولت و ولتاژ خازن در ابتدای بازه صفر ولت است. طول بازه نیز یک ثانیه است. بنابراین این بازه از همه جهات همانند بازه ۱ تا ۲ ثانیه است و ولتاژ خازن در انتهای این بازه همانند بازه ۱ تا ۲ ثانیه خواهد بود.بازه های زمانی ۱۰ تا ۱۱ ثانیه و ۱۲ تا ۱۳ ثانیه و ۱۳ به بعد نیز همانند بازه های ۲ تا ۳ ثانیه و ۳ تا ۴ ثانیه و ۴ ثانیه به بعد هستند.



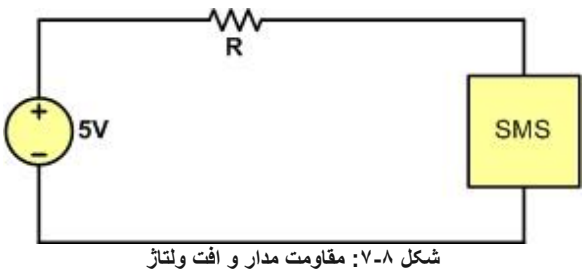
بخش ۸-۳: کاربردهای خازن

در این بخش به بررسی برخی از کاربردهای خازن می پردازیم.

ذخیره کردن انرژی

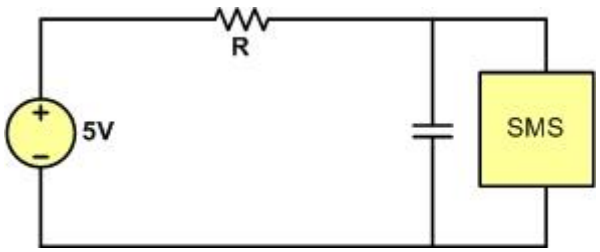
از جمله کاربردهای خازن ذخیره کردن انرژی است. برخی از آی سی ها و قطعات الکتریکی، به طور معمول مصرف برق اندکی دارند. اما در شرایطی خاص، برق زیادی را مصرف می کنند. به طور مثال، آی سی هایی که برای ارسال SMS ساخته شده اند، به طور معمول، جریانی در حد چندین میلی آمپر می کشند. اما زمانی که بخواهند SMS ارسال کنند، برای زمان کوتاهی جریانی در حد ۲ آمپر را می کشند. ممکن است شخص تازه کاری که از الکترونیک تجربه چندانی ندارد، با خود حساب کند که "بسیار خوب! اگر این آی سی SMS، ۲ آمپر مصرف می کند، یک منبع تغذیه ۵ ولت ۲ آمپری می گذارم و مداری طراحی می کنم که این آی سی به منبع تغذیه متصل شود." اما در عمل موقعی که مدار را می بندد می بیند که زمانی که می خواهد SMS بفرستد، سیستم از کار می افتد. زیرا سیمها و مداری که بین آی سی و منبع تغذیه قرار دارند، از خود مقاومتی دارند. مثلا فرض کنید که سیمهایی که بین آی سی SMS و منبع تغذیه قرار دارند، یک اهم مقاومت داشته باشند. (در عمل ممکن است بیش از یک اهم مقاومت وجود داشته باشد) در طول مدتی که ماژول SMS، جریانی در حد چند میلی آمپر مصرف می کند، افت ولتاژ بر روی مقاومت سیمها بسیار اندک است. اما درست در لحظه ای که میخواهد SMS بفرستد، جریان زیادی از سیمها کشیده می شود و افت ولتاژ زیادی بر روی سیمها اتفاق میافتد و آی سی SMS خاموش می شود. به طور مثال اگر سیمها یک اهم مقاومت داشته باشند که در لحظه ای که میخواهد SMS بفرستد به اندازه ۲ ولت بر روی سیمها می افتد و ولتاژ تغذیه SMS به ۳ ولت می رسد:

$V_R = RI = 1 \times 2 = 2V \rightarrow 5 - 2 = 3V$



شکل ۸-۷: مقاومت مدار و افت ولتاژ

راه حل این است که در کنار آی سی ها و قطعاتی که مصرف برق لحظه ای زیادی دارند یک خازن قرار دهیم. (شکل زیر) در این صورت، در طول مدتی که آی سی مصرف برق اندکی دارد خازن شارژ می شود و در لحظه ای که آی سی جریان زیادی می کشد، خازن این جریان را تامین می کند. شاید تجربه کرده باشید که آب منزل شما قطع شده باشد و به طور قطره چکان از شیر، آب بیاید. با این قطرات آب نمی توانیم دوش بگیریم یا کاری کنیم. اما اگر یک تشت در زیر شیر آب قرار دهیم قطرات آب به مرور در تشت جمع می شوند و سپس با یک تشت آب می توانیم کارهای خود را انجام دهیم. خازن نیز درست مثل این تشت عمل می کند. به مرور بار الکتریکی در خازن ذخیره میشود و در زمانی که لازم داریم از آن استفاده می کنیم. همان طوری که در این فصل آموخته اید، در مدار زیر خازن به مرور شارژ می شود تا به ولتاژ منبع تغذیه برسد. بنابراین در لحظه ای که آی سی SMS می خواهد، برق مصرف کند، در کنار خود یک منبع تغذیه دارد که بدون مقاومتی برق ۵ ولت را برای آی سی SMS فراهم می کند.



شکل ۸-۸: استفاده کردن از خازن در کنار آی سی های که جریان لحظه ای بالایی دارند

البته در عمل، اکثر آی سی های SMS، با ولتاژ ۳.۳ کار می کنند که در آن شرایط، تاثیر مقاومت سیمهای مدار پررنگتر است. به طور نمونه، اگر در همین مثال فوق، ولتاژ منبع ۳.۳ ولت باشد و ۲ ولت بر روی مقاومت سیمها بیافتد، فقط ۱.۳ به دست آی سی SMS می رسد.

در آی سی های CMOS نیز در لحظه ای که مدار بین حالت HIGH و LOW تغییر وضعیت می دهد، در یک لحظه جریان زیادی کشیده می شود و به همین خاطر در دیتاشیت برخی از آی سی ها اعلام شده است که خازنی را در کنار آی سی در بین سرهای VCC و GND قرار دهیم.

ذخیره کردن اطلاعات در حافظه های DRAM

همانطوری که در این فصل دیدیم، اگر ولتاژی را به دو سر خازن اعمال کنیم، خازن شارژ می شود و آن ولتاژ را در خود نگهداری می کند. بنابراین اگر ولتاژ ۰ ولت یا ۵ ولت را به دو سر خازن اعمال کنیم، خازن برای ما ولتاژ ۰ ولت و ۵ ولت را می تواند نگهدارد. بنابراین از خازن می توانیم برای ذخیره کردن یک بیت دیتا استفاده کنیم. در حافظه های DRAM که در کامپیوترهای خانگی به عنوان RAM استفاده می شود از خازن برای ذخیره سازی اطلاعات استفاده میشود.

در درس مدار منطقی احتمالا فرا گرفته اید که با استفاده از گیتهای منطقی فلیپ فلاپ بسازید و اطلاعات را ذخیره کنید. همانطوری که در فصل هفت دیدید، گیتهای منطقی از ترانزیستور ساخته شده اند. بنابراین فلیپ فلاپها هم برق مصرف می کنند و هم از آنجایی که از چندین ترانزیستور تشکیل شده اند جای زیادی را اشغال میکنند و هزینه تولید آنها نیز بالاتر است. اما مزیتی که دارند سرعت بالای کار کردنشان است.

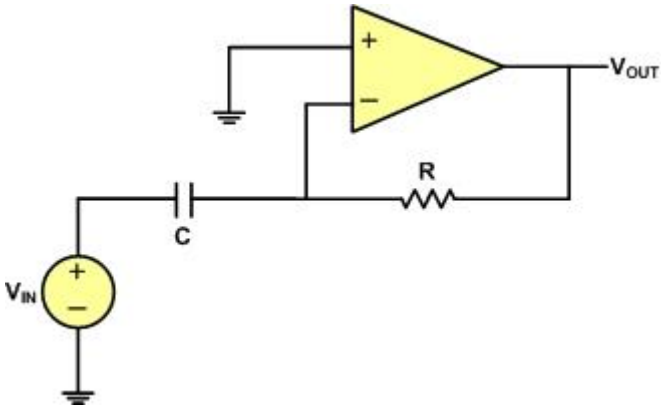
حافظه های DRAM با توجه به اینکه از خازن تشکیل شده اند و خازن مدتی طول می کشد تا شارژ و دشارژ شود بنابراین سرعت کمتری در مقایسه با فلیپ فلاپ دارد. اما با توجه به اینکه با قرار دادن یک لایه عایق بین دو تا رسانا، خازن

تشکیل می شود، بنابراین هزینه تولید حافظه DRAM خیلی کمتر است و مصرف برقی نیز ندارد و فضای کمتری نیز اشغال میکند. در عمل حافظه Cache از کامپیوتر شما با استفاده از فلیپ فلاپ ساخته شده که سرعت بالایی دارد و فضای اندکی دارد. اما حافظه RAM از کامپیوتر شما از خازن ساخته شده است که ظرفیت زیاد و قیمت ارزانی دارد.

مدار مشتق گیر و مدار انتگرال گیر

مدار مشتق گیر

با استفاده از خازن و اپ امپ می توانیم به صورت زیر یک مدار مشتق گیر بسازیم.



شکل ۸- ۹: مدار مشتق گیر

در مدار فوق طبق قاعده طلایی $+V$ برابر با $-V$ است و با توجه به اینکه $+V$ به زمین متصل شده است پس $-V$ نیز برابر صفر ولت است. در این مدار، ولتاژ خروجی برابر است با:

$$V_{OUT} = 0 - iR = -iR$$

بنابراین کافی است که جریان گذرا از مقاومت را به دست آوریم تا ولتاژ خروجی به دست آید. با توجه به اینکه جریان وارد شده به سر $-V$ از اپ امپ، صفر است، پس جریان گذرا از خازن و جریان گذرا از مقاومت با هم برابر است. می دانیم که در خازن:

$$q = CV_C \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV_C)}{dt} \Rightarrow i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$$V_C = V_{IN} - 0 \rightarrow V_C = V_{IN}$$

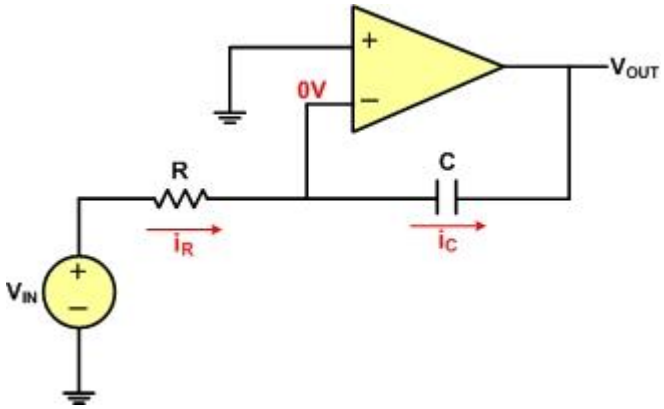
بنابراین V_{OUT} برابر است با:

$$V_{OUT} = -iR = -I_C R = -RC\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow V_{OUT} = -RC\frac{dV_C}{dt}$$

بنابراین مدار فوق، به میزان نوساناتی که در ولتاژ ورودی اتفاق می افتد، ولتاژی را در خروجی خود ایجاد می کند.

انتگرال گیر

مدار زیر، همان طوری که خواهیم دید، از سیگنال ورودی انتگرال می گیرد.



شکل ۸-۱۰: مدار انتگرال گیر

در مدار فوق طبق قاعده طلایی، ولتاژ +V و −V با هم برابر است و چون +V زمین شده است، ولتاژ −V نیز صفر ولت است.

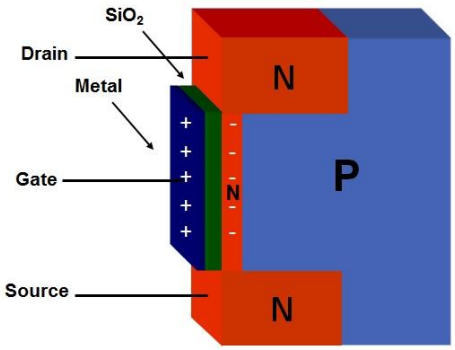
$$V_R = V_{IN} - 0 \rightarrow V_R = V_{IN} \rightarrow i_R = \frac{V_{IN}}{R}$$

$$i_C = C\frac{dV_c}{dt}$$

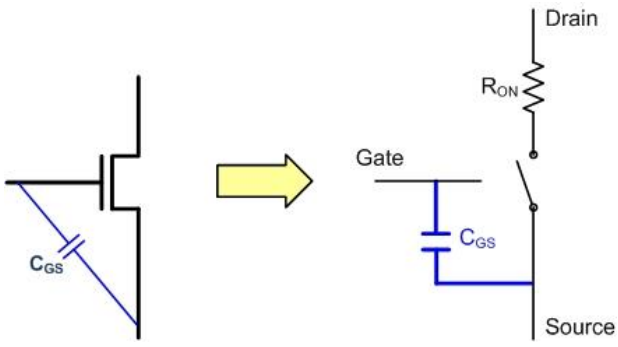
$$i_R = i_C \rightarrow \frac{V_{IN}}{R} = C\frac{dV_c}{dt} \Rightarrow dV_c = \frac{V_{IN}}{RC}dt \Rightarrow \int dV_c = \int \frac{V_{IN}}{RC}dt \Rightarrow V_C = \frac{1}{RC}\int V_{IN}dt$$

بخش ۸-۴: خاصیت خازنی در MOSFET و تاثیر خاصیت خازنی در دنیای دیجیتال

همان طوری که در ساختار موسفت دیدید، یک لایه عایق بین Gate و سایر اجزای ترانزیستور قرار گرفته اند. میدانیم که اگر بین دو رسانا عایقی قرار گیرد، خازنی تشکیل میشود. بنابراین در داخل ترانزیستورهای MOSFET، بین Gate و Source، خازنی تشکیل می شود که وجود این خازن کمی در رفتار ترانزیستور تاثیر می گذارد. اگر بخواهیم خاصیت خازنی MOSFET را مدل کنیم می توانیم MOSFET را به صورت شکل ۸-۱۱ مدل کنیم.



شکل ۸-۱۲: ساختار داخلی MOSFET

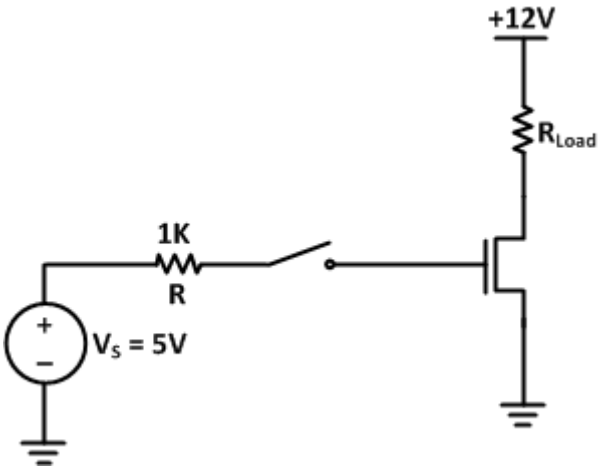


شکل ۸-۱۱: مدل کردن خاصیت خازنی موجود در MOSFET

به طور نمونه مثالهای زیر را ببینید.

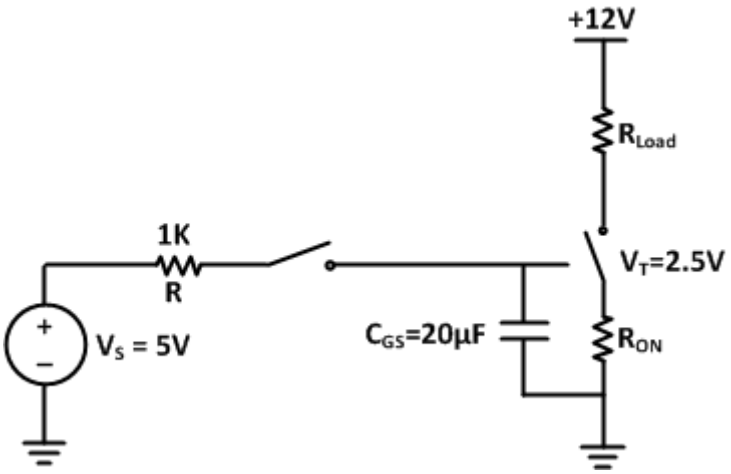
مثال ۸-۱۲

در مدار زیر با فرض اینکه V_T در ترانزیستور 2.5 ولت باشد و C_{GS} برابر با ۲۰ میکرو فاراد باشد، چه مدت پس از اینکه کلید بسته شود، ترانزیستور روشن می‌شود؟



پاسخ:

به جای ترانزیستور، مدل خازنی آن را قرار می‌دهیم و مدار به شکل زیر می‌شود.



در ترانزیستور فوق هر گاه ولتاژ پایه Gate به ۲,۵ ولت برسد، ترانزیستور روشن می‌شود. اما برای اینکه ولتاژ پایه Gate به ۲,۵ ولت برسد، لازم است که خازن C_{GS} شارژ شود و ولتاژ آن به ۲,۵ ولت برسد. با استفاده از رابطه ولتاژ دو سر خازن مدت زمانی که طول می‌کشد تا خازن شارژ شود را محاسبه می‌کنیم:

$$\tau = R \times C = 1K \times 20\mu = 20ms = 0.02s$$

با فرض اینکه قبل از بسته شدن کلید، خازن کاملا دشارژ باشد، ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$$V_C(\tau) = V_{final} - \left(V_{final} - V_{init}\right)e^{\frac{-t}{\tau}} = 5 - (5-0)e^{\frac{-t}{0.02}} \xrightarrow{V_C=2.5} 2.5 = 5 - 5e^{\frac{-t}{0.02}} \Rightarrow 2.5 = 5e^{\frac{-t}{0.02}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-t}{0.02}} = 0.5$$

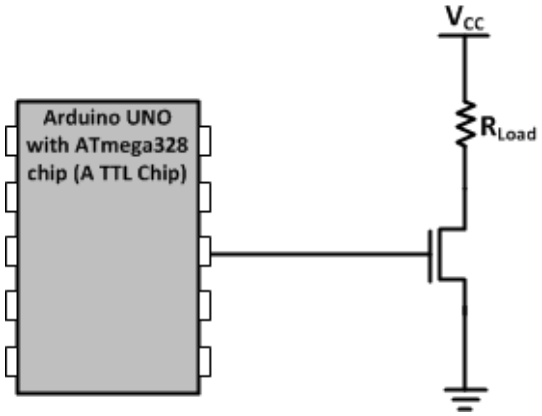
برای اینکه مقدار t را در رابطه فوق به دست آوریم از طرفین تساوی لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow Ln\, e^{\frac{-t}{0.02}} = Ln\, 0.5 \Rightarrow \frac{-t}{0.02} = Ln\, 0.5 = -0.693 \Rightarrow t = 0.01386 = 13.86ms$$

بنابراین 13.86 میلی ثانیه پس از بسته شدن کلید، ولتاژ پایه Gate به 2.5 ولت می‌رسد و ترانزیستور روشن می‌شود.

مثال ۸-۱۳

خروجی یک آی سی TTL را به یک ترانزیستور MOSFET متصل کرده‌ایم. الف) حساب کنید که چه مدت پس از اینکه آی سی TTL خروجی خود را روشن کند، ترانزیستور روشن می‌شود. مقدار مقاومت خروجی این آی سی 25 اهم است و مقدار C_{GS} برای این ترانزیستور 10nF می‌باشد و ولتاژ آستانه (V_T) برابر با ۳ ولت است. ب) چه مدت بعد از اینکه آی سی خروجی خود را زمین کند، ترانزیستور خاموش می‌شود؟



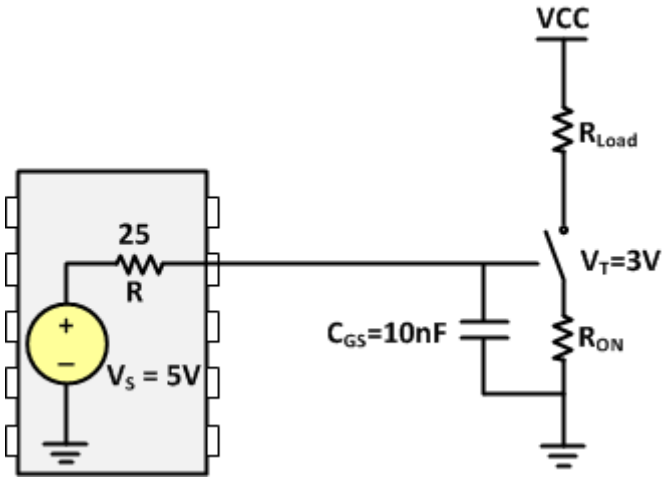
پاسخ:

الف) با توجه به اینکه آی سی از خانواده TTL است، پس ولتاژ خروجی آن در حالت روشن ۵ ولت است و مدار را می‌توانیم به شکل زیر مدل کنیم. با توجه به اینکه V_T=3 است، پس ولتاژ پایه Gate ترانزیستور می‌بایست به ۳ ولت برسد تا ترانزیستور روشن شود.

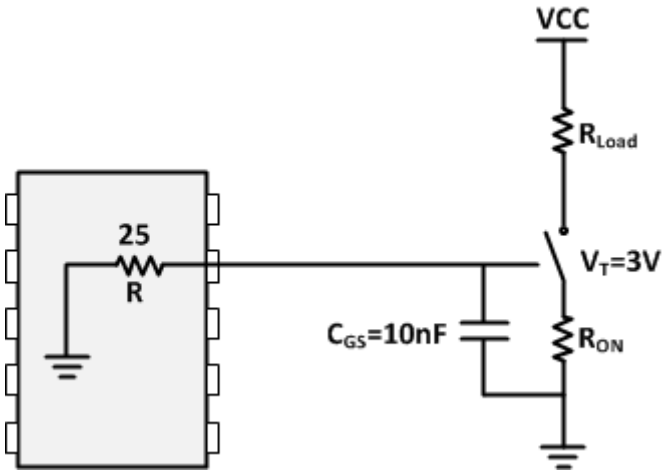
$$\tau = R \times C = 25 \times 10nF = 250ns$$

$$V_C(\tau) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}} = 5 - (5-0)e^{\frac{-t}{250n}} \xrightarrow{V_C=3} 3 = 5 - 5e^{\frac{-t}{250n}} \Rightarrow 2 = 5e^{\frac{-t}{250n}}$$

$$\Rightarrow \frac{-t}{250n} = Ln\ 0.4 \Rightarrow t = 229ns$$



ب) هنگامی که آی سی خروجی خود را زمین کند مدار زیر تشکیل می‌شود و با فرض اینکه قبلا ترانزیستور روشن بوده و خازن به اندازه ۵ ولت (که ولتاژ خروجی آی سی TTL است) شارژ شده باشد، به محاسبه مدت زمانی که طول می‌کشد تا ولتاژ خازن به زیر ۳ ولت افت کند و ترانزیستور خاموش شود می‌پردازیم.



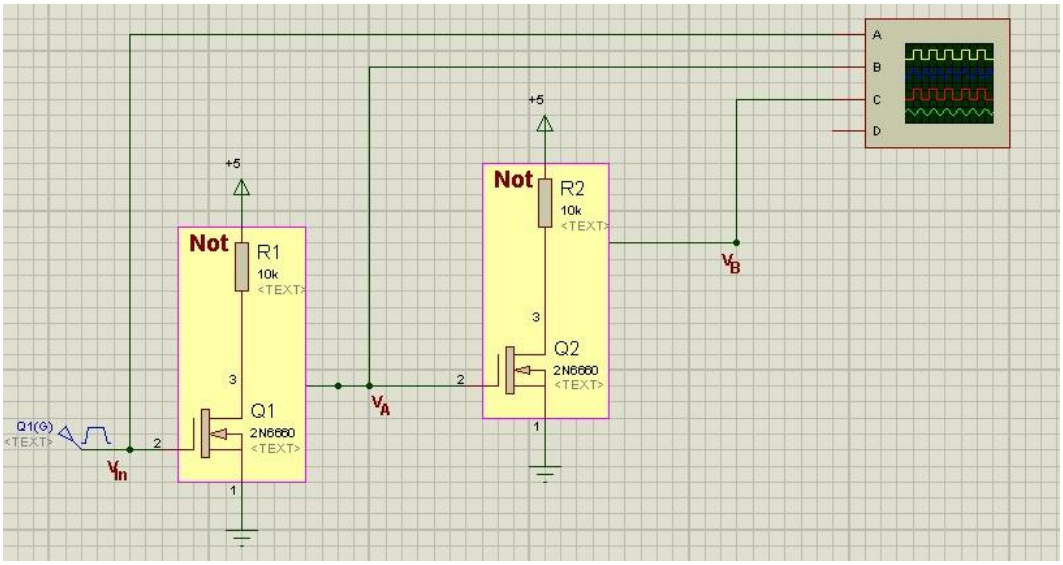
$$\tau = R \times C = 25 \times 10nF = 250ns$$

$$V_C(\tau) = V_{final} - (V_{final} - V_{init})e^{\frac{-t}{\tau}} = 0 - (0-5)e^{\frac{-t}{250n}} \xrightarrow{V_C=3} 3 = 5e^{\frac{-t}{250n}}$$

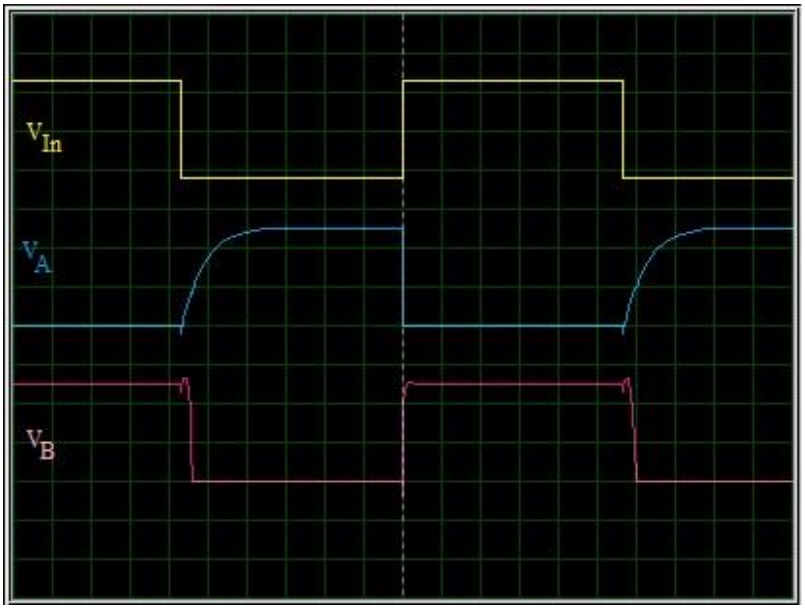
$$\Rightarrow \frac{-t}{250n} = Ln\ 0.6 \Rightarrow t = 127.7ns$$

همان طوری که در مثالهای فوق دیدیم مدت زمانی که طول می‌کشد تا ترانزیستوری روشن یا خاموش شود، بسیار کمتر از ثانیه است و بنابراین در هنگام روشن یا خاموش کردن وسایل برقی می‌توانیم از تاخیر آن چشم پوشی کنیم. اما همین تاخیر سرعت کار کردن مدارهای دیجیتال را محدود می‌کند و دست طراحان را برای بالا بردن سرعت کامپیوترها می‌بندد.

برای اینکه تاثیر خاصیت خازنی را در دنیای دیجیتال ببینیم، بیایید دو تا گیت Not را که با استفاده از MOSFET ساخته شده اند، به صورت زیر پشت سر هم قرار دهیم و خروجی مدار را بررسی کنیم. اگر سیگنالی دو بار NOT شود، انتظار می رود که همان سیگنال را در خروجی داشته باشیم. اما در عمل، ملاحظه می کنیم که سیگنال در خروجی اولین not و دومین not، با آنچه که به طور ایده آل انتظار داریم فرق می کند. شکل ۸-۱۴ را ببینید.

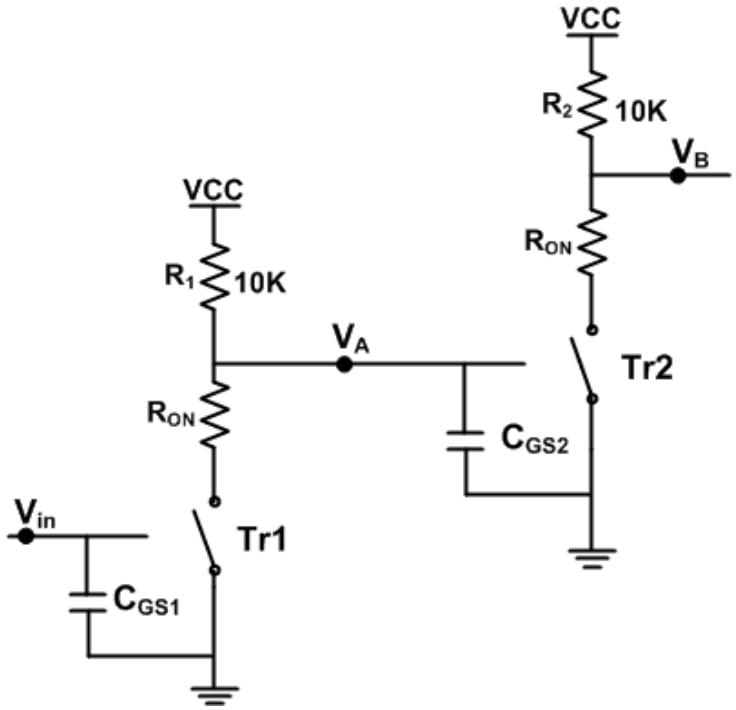


شکل ۸-۱۳: شکل دو تا Not که به هم متصل شده اند



شکل ۸-۱۴: شکل موج در گره های A و B از مدار ۸-۱۱

در شکل ۸–۱۵، ترانزیستورهای شکل ۸–۱۳ با مدل خازنی ترانزیستور، مدل سازی شده‌اند. در عمل خازنی که بین سرهای Gate و Source از ترانزیستور Tr2 قرار دارد، با مقاومتهای گیت قبل از خود، تشکیل مدار RC می‌دهد و به همین خاطر، مدتی طول می کشد که خازن موجود در ترانزیستور Tr2 شارژ و دشارژ شود و خروجی خود را تغییر دهد.



شکل ۸-۱۵: مدل کردن خاصیت خازنی ترانزیستورها برای شکل ۸-۱۲

مثلا هنگامی که ترانزیستور Tr1 خاموش می‌شود، پایه گیت از ترانزیستور Tr2 از طریق مقاومت R1 به ۵ ولت متصل می‌شود. اگر ترانزیستور خاصیت خازنی نداشت بلافاصله ترانزیستور Tr2 روشن می‌شد. اما در عمل خازن C_{GS2} با مقاومت R1 تشکیل یک مدار RC را می‌دهند و مدتی طول می‌کشد تا خازن C_{GS2} از طریق مقاومت، شارژ شود و ترانزیستور روشن شود.

همچنین زمانی که ترانزیستور Tr1 روشن می‌شود، گره A از طریق ترانزیستور Tr1 به زمین متصل می‌شود. اما ترانزیستور Tr1 دارای مقاومت داخلی R_{ON} است و ترانزیستور Tr2 نیز خاصیت خازنی دارد و بنابراین مدتی طول می‌کشد تا خازن C_{GS2} دشارژ شود و ترانزیستور Tr2 خاموش شود. مثال ۸-۱٤ را ببینید.

مثال ۸-۱۴

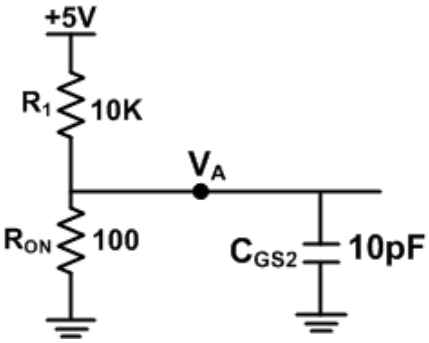
مدار شکل ۸-۱۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید که ترانزیستورها به گونه ای هستند که اگر V_{GS} کمتر از ۲ ولت شود، ترانزیستورها خاموش شوند و اگر V_{GS} بیشتر از 3.5 ولت باشند، ترانزیستورها روشن می‌شوند. همچنین مقدار خاصیت خازنی ترانزیستورها را ۱۰ پیکو فاراد و مقاومت R_{ON} را 100 اهم فرض کنید.

الف) اگر ولتاژ V_{in} برابر با ۵ ولت شود، چه مدت طول می‌کشد تا Tr2 خاموش شود؟

ب) حساب کنید که اگر ولتاژ V_{in} برابر با صفر ولت شود، چه مدت طول می‌کشد تا ترانزیستور Tr2 روشن شود.

پاسخ:

الف) هنگامی که V_{in} برابر با ۵ ولت شود، ترانزیستور Tr1 روشن می‌شود و مدار زیر تشکیل می‌شود.

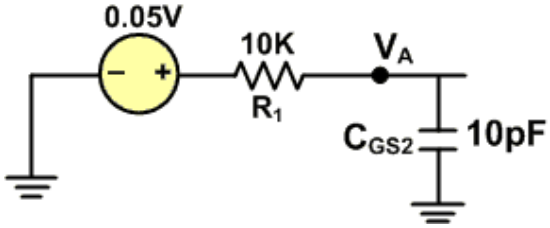


برای اینکه مدار را راحت تر تحلیل کنیم، معادل تونن را از دید خازن محاسبه می‌کنیم. برای به دست آوردن ولتاژ تونن، ولتاژ مدار باز گره A را حساب میکنیم. در این حالت مقاومتهای R1 و R_{ON} با هم سری می‌شوند و با استفاده از معادله تقسیم ولتاژ، ولتاژ V_{Th} برابر است با:

$$V_{Th} = \frac{R_{ON}}{R_{ON} + R_1} \times 5 = \frac{100}{10100} \times 5 = 0.05$$

برای به دست آوردن مقاومت تونن، مقاومت مدار خاموش را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{Th} = R_1 || R_{ON} = 10K || 100 = \frac{10000 \times 100}{10100} = 99$$



برای اینکه ترانزیستور Tr2 خاموش شود، می‌بایست ولتاژ گره A به کمتر از ۲ ولت افت کند. ولتاژ گره A با ولتاژ دو سر خازن برابر است. بنابراین معادله ولتاژ خازن را می‌نویسیم و محاسبه می‌کنیم که بعد از چه مدتی ولتاژ خازن به ۲ ولت می-رسد. فرض می‌کنیم که قبلا به مدت طولانی ترانزیستور Tr2 روشن بوده و خازن کاملا شارژ است. در این مدار مقدار R برابر با ۹۹ اهم و C برابر با 10pF است و بنابراین T برابر با ۹۹۰ پیکو ثانیه است.

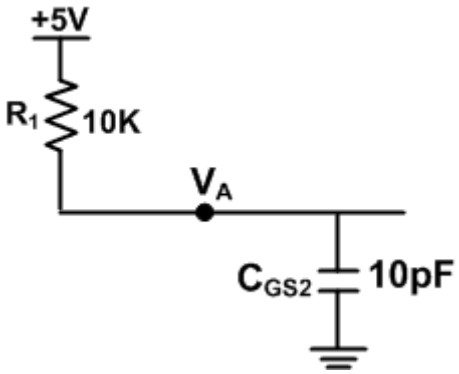
$$V_C(t) = 0.05 - (0.05 - 5)e^{-t/\tau} \rightarrow 2V = 0.05 + 4.95e^{-t/990} \rightarrow 1.95 = 4.95e^{-t/990} \rightarrow e^{-t/990} = 0.39$$

برای به دست آوردن مقدار t از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$-t/990 = \text{Ln } 0.39 = -0.94 \rightarrow t = 990 \times 0.94 = 930 \text{ ps}$

بنابراین حدود ۹۳۰ پیکو ثانیه طول می‌کشد تا ترانزیستور Tr2 خاموش شود.

ب) هنگامی که Vin صفر ولت شود، ترانزیستور Tr1 خاموش می‌شود و پایه گیت از ترانزیستور Tr2 از طریق مقاومت R1 به ۵ ولت متصل می‌شود. بنابراین مدار زیر شکل می‌گیرد.



در قسمت الف، دیدیم که ولتاژ تونن برای حالتی که ترانزیستور Tr1 روشن است، برابر با 0.05 ولت است. بنابراین اگر برای مدتی طولانی ترانزیستور Tr1 روشن بوده باشد، ولتاژ خازن C_{GS2} به ولتاژ 0.05 رسیده است و ولتاژ اولیه را 0.05 میگیریم. برای اینکه Tr2 روشن شود، می‌بایست ولتاژ پایه گیت آن که همان ولتاژ دو سر خازن C_{GS2} است بیشتر از 3.5 ولت شود. بنابراین محاسبه می‌کنیم که چه مدت طول می‌کشد تا خازن به 3.5 ولت برسد.

$T = R \times C = 10K \times 10\ p = 100 \text{ ns}$

$V_C = 5 - (5 - 0.05)\, e^{-t/\tau} \rightarrow 3 = 5 - 4.95\, e^{-t/100n} \rightarrow 2 = 4.95 e^{-t/100n} \rightarrow 0.4 = e^{-t/100n} \rightarrow$

$-t/100n = \text{Ln } 0.4 = -0.9 \rightarrow t = 40 \text{ ns}$

بنابراین حداکثر پس از ۴۰ نانو ثانیه ترانزیستور Tr2 روشن می‌شود.

مفهوم تاخیر انتشار (propagation delay) **در مدارهای دیجیتال**

اصطلاح تاخیر انتشار، بیان می‌کند که اگر ما مقادیری را به ورودی یک مدار دیجیتال اعمال کنیم چه مدت طول می‌کشد تا مقادیر صحیح در خروجی آن مدار ظاهر شوند.

به طور نمونه در مداری که در مثال ۸–۱۲ تحلیل کردیم، هنگامی که ورودی مدار را از صفر به یک تغییر می‌دهیم، ۹۳۰ پیکو ثانیه طول می‌کشد تا حاصل در پایه خروجی ظاهر شود و هنگامی که ورودی را از یک به صفر تغییر می‌دهیم، ٤٠ نانو ثانیه طول می‌کشد تا حاصل در خروجی ظاهر شود. بنابراین در این مدار می‌توانیم مطمئن باشیم که به ازای هر ورودی که به آن می‌دهیم حداکثر پس از ٤٠ نانو ثانیه، جواب آن در خروجی ظاهر می‌شود.

برای به دست آوردن تاخیر انتشار در یک مدار می‌آییم بیشترین زمانی که ممکن است طول بکشد تا یک مدار، به ازای ورودی که به آن می‌دهیم، خروجی معتبری را بدهد را پیدا می‌کنیم:

$$t_{pd} = \text{Max}(t_{pd,1\rightarrow0}, t_{pd,0\rightarrow1})$$

در فرمول فوق، t_{pd} زمان تاخیر انتشار (propagation delay) است و $t_{pd,1\to0}$ مقدار تاخیر مدار در موقعی است که ورودی از ۱ به ۰ تغییر می‌کند. همچنین $t_{pd,0\to1}$ مقدار تاخیر مدار در موقعی است که ورودی از ۰ به ۱ تغییر کند. به طور نمونه، مثال ۸–۱۵ را ببینید.

مثال ۸-۱۵

در یک گیت AND، هنگامی که مقدار ورودی را از 0 به 1 تغییر دهیم 1.5 میکرو ثانیه بعد، خروجی تغییر می‌کند و هنگامی که ورودی را از 1 به 0 تغییر دهیم، خروجی بعد از 1 میکرو ثانیه تغییر می‌کند. زمان تاخیر انتشار در این گیت AND چقدر است؟

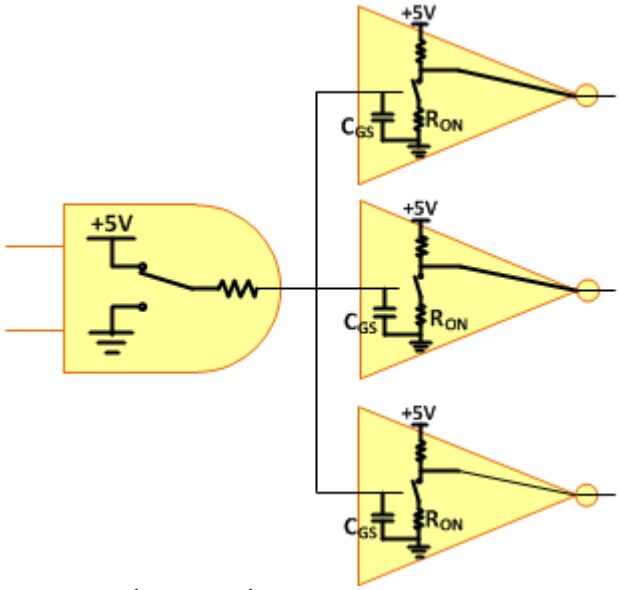
پاسخ:

$$t_{pd} = Max(t_{pd,1\to0}, t_{pd,0\to1}) = Max(1\mu s, 1.5\mu s) = 1.5\mu s$$

مفهوم تاخیر انتشار از این جهت مهم است که هنگامی که ما از مداری استفاده می‌کنیم، می‌بایست به اندازه تاخیر انتشارِ آن مدار صبر کنیم تا پاسخ معتبر در خروجی حاصل شود. مثلا اگر یک CPU، طراحی می‌کنیم و در آن از یک واحد ALU (واحد محاسبات ریاضی و منطقی) استفاده می‌کنیم که دارای تاخیر انتشار ۵۰ نانو است، می‌بایست هر موقع که مقادیری را جهت محاسبه به ورودی ALU اعمال می‌کنیم، به اندازه ۵۰ نانو ثانیه صبر کنیم تا مدار ALU، جواب صحیح را در خروجی خود تحویل دهد. عملا همین تاخیر انتشار موجود در مدارهای داخل CPU مانع از این می‌شود که بتوانیم سرعت کار کردن CPU را بالا ببریم.

تاثیر متصل کردن چندین گیت به خروجی گیت

در شکل زیر، مدل خازنی ترانزیستورهای موجود در تعدادی گیت را ترسیم کرده‌ایم و آنها را به خروجی یک گیت متصل کرده‌ایم. همان طوری که می‌بینید، ظرفیت خازنی ترانزیستورهای گیت‌ها با هم موازی می‌شوند و بنابراین هر چه تعداد بیشتری گیت را به خروجی یک گیت متصل کنیم، ظرفیت خازنی افزایش پیدا می‌کند و بنابراین تاخیر انتشار نیز افزایش پیدا می‌کند. مثلا اگر n تا گیت همسان را به خروجی گیتی متصل کنیم، خاصیت خازنی nC_{GS} می‌شود و تاخیر نیز n برابر می‌شود.



شکل ۸-۱۶: اتصال خروجی یک گیت به چندین گیت

بخش ۸-۵: انواع خازنهای موجود و خواندن ظرفیت آنها

جنس ماده عایق (دی الکتریک) به کار رفته در خازنهای مختلف با هم فرق می‌کند و همین تفاوت باعث متفاوت بودن خصوصیات خازنها می‌شود. خازنها را می‌توانیم به دو دسته قطبی و غیرقطبی تقسیم بندی کنیم.

خازنهای قطبی (polarized) دارای سر مثبت و منفی هستند و اگر ولتاژی در خلاف جهت به آنها اعمال کنیم آسیب می‌بینند. خازنهای قطبی معمولا ظرفیتهای بیشتری در مقایسه با خازنهای غیرقطبی دارند. خازنهای الکترولیت (electrolytic) مرسوم ترین خازنهای نوع قطبی هستند که به شکل استوانه‌ای (یا به قولی بشکه‌ای) هستند. در شکل ۸–۱۷ عکس یک خازن الکترولیت را می‌بینید. بر روی خازنهای الکترولیت، سر منفی معمولا با یک نوار باریک که روی آن علامت منفی کشیده شده، علامتگذاری می‌شود و ظرفیت خازن و حداکثر ولتاژ کاری آن بر روی آن نوشته می‌شود. منظور از حداکثر ولتاژ کاری، حداکثر ولتاژی است که خازن می‌تواند تحمل کند و اگر ولتاژی بیشتر از این ولتاژ به خازن اعمال کنیم، آسیب می‌بیند.

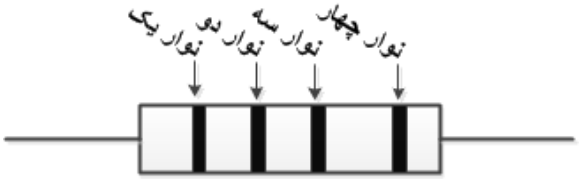
شکل ۸-۱۷: خازن الکترولیت ۴۷۰میکروفاراد ۲۵ ولت

خازنهای غیر قطبی، دارای سر مثبت و منفی نیستند. بنابراین ولتاژ را در هر جهتی که بخواهیم می‌توانیم به خازن اعمال کنیم. خازنهای سرامیکی از جمله خازنهای غیرقطبی هستند. در مواقعی که اندازه خازن کوچک باشد و جای کافی برای نوشتن مقدار خازن موجود نباشد، ظرفیت خازن را به صورت یک عدد سه رقمی بر حسب پیکو فاراد بر روی خازن می‌نویسند. برای اینکه مقدار خازن را به دست آورید دو رقم سمت چپ را در نظر بگیرید و به تعداد آخرین رقم سمت راست، صفر جلوی این عدد بگذارید. مثلا اگر روی خازنی عدد ٤٧٣ نوشته شده باشد، عدد ٤٧ را در نظر می‌گیریم و ۳ تا صفر جلوی آن می‌گذاریم که عدد ٤٧٠٠٠ به دست می‌آید و بنابراین ظرفیت آن ٤٧٠٠٠ پیکوفاراد یا به عبارتی ٤٧ نانو فاراد است. همچنین اگر روی خازنی عدد ۳۳۰ نوشته شده باشد، عدد ۳۳ را در نظر می‌گیریم و به تعداد صفر تا عدد صفر جلوی آن می‌گذاریم که همان ۳۳ به دست می‌آید و بنابراین ظرفیت آن ۳۳ پیکو فاراد است. در شکل ۸–۱۸ عکس یک خازن سرامیکی ۱۰۰ نانو فاراد را می‌بینید. با توجه به اینکه شکل خازنهای سرامیکی شبیه عدس است به آنها خازن عدسی هم می‌گویند.

شکل ۸-۱۸: خازن سرامیکی ۱۰۰ نانوفاراد

ضمیمه الف: طریقه خواندن اندازه مقاومتها

اندازه مقاومتهایی که در مدارها استفاده می‌کنیم معمولا کوچک هستند و اگر بخواهیم مقدار آنها را به صورت عددی به روی آنها بنویسیم نوشته‌ها بسیار ریز و ناخوانا می‌شود. بنابراین مقادیر مقاومتها را با استفاده از نوارهای رنگی که بر روی آن چاپ می‌کنند بیان می‌کنند. در زیر عکس یک مقاومت که بر روی آن چهار نوار رنگی رسم شده است را می بینید.

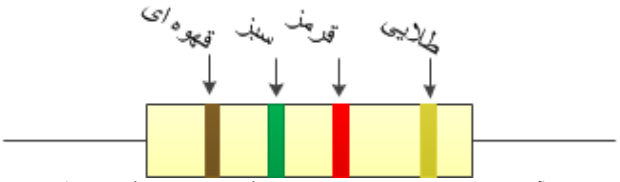


شکل آ-۱: عکس یک مقاومت با چهار نوار رنگی

رنگ	عدد
سیاه	۰
قهوه‌ای	۱
قرمز	۲
نارنجی	۳
زرد	۴
سبز	۵
آبی	۶
بنفش	۷
خاکستری	۸
سفید	۹

طریقه خواندن مقادیر مقاومتها به این صورت است که هر یک از رنگها دارای عدد مشخصی است که در جدول روبرو ذکر شده‌اند. هنگامی که می‌خواهید مقدار مقاومت را بخوانید به گونه‌ای آن را در دست می‌گیرید، که نواری طلایی رنگ در سمت راست قرار گیرد. سپس از چپ به راست به نوارها نگاه می‌کنیم و عدد مربوط به نوار اول و دوم را به ترتیب یادداشت می‌کنیم و سپس به تعداد عدد نوار سوم در جلوی عدد صفر می‌گذاریم.

مثلا در مقاومت زیر که اولین نوار قهوه‌ای (عدد ۱) و نوار دوم سبز (عدد ۵) و نوار سوم قرمز (عدد ۲) است، ابتدا عدد قهوه‌ای و سپس عدد سبز را می‌نویسیم که عدد ۱۵ تشکیل می‌شود و سپس با توجه به اینکه نوار سوم قرمز (۲) است، دو تا صفر به جلوی عدد ۱۵ می‌گذاریم که حاصل عدد ۱۵۰۰ می‌شود. پس مقدار این مقاومت ۱۵۰۰ اهم است.



شکل آ-۲: عکس یک مقاومت با نوارهای قهوه‌ای، سبز، قرمز و طلایی

برای اینکه مطمئن باشیم که اولین نوار را درست تشخیص می‌دهیم و آن را با نوار چهارم اشتباه نگیریم، معمولا نوار چهارم نسبت به بقیه نوارها فاصله بیشتری دارد. عکس مقاومت فوق را ببینید.

درصد خطا (تلورانس)

نوار آخر، بیان کننده درصد خطایی است که مقدار مقاومت ممکن است داشته باشد. در جدول زیر، رنگهای مرسوم و میزان درصد خطا ذکر شده است. در اکثر مقاومتها، نوار آخر طلایی رنگ است که به معنای درصد خطای ۵٪ می‌باشد. بدین معنی که مقدار مقاومت ممکن است حداکثر تا ۵٪ نسبت به آنچه که روی آن نوشته شده کمتر یا بیشتر باشد. به طور مثال، در مقاومت شکل آ-۲ که مقدار مقاومت ۱۵۰۰ اهم است و نوار آخر آن طلایی است مقدار مقاومت برابر است با:

رنگ	درصد خطا
سبز	0.5%
قهوه‌ای	۱
قرمز	۲
طلایی	۵٪
نقره ای	۱۰٪

$$1500 \pm 5\% = 1500 \pm 0.05 \times 1500 = 1500 \pm 75$$

یعنی مقدار واقعی مقاومت می‌تواند بین ۱۴۲۵ اهم تا ۱۵۷۵ اهم باشد.